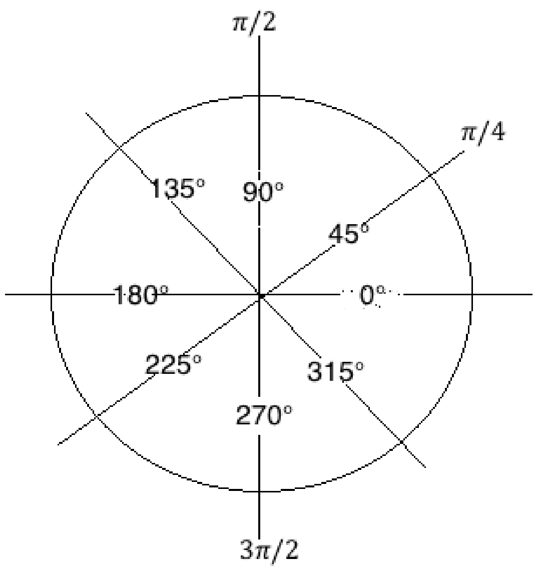
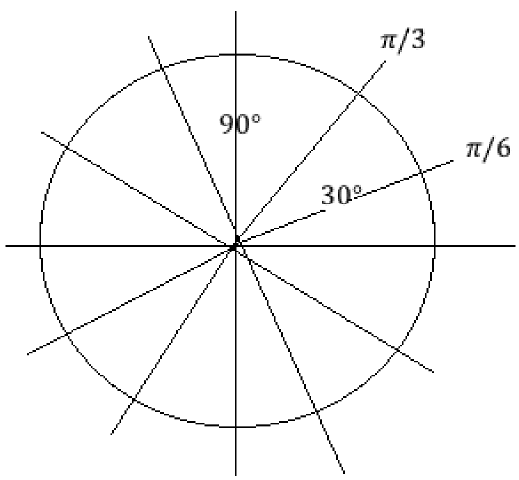
INSTITUTO TÉCNICO INDUSTRIAL FRANCISCO JOSÉ DE CALDAS

ÁREA MATEMÁTICAS   GRADO 10o.

MÚLTIPLOS DE 45°



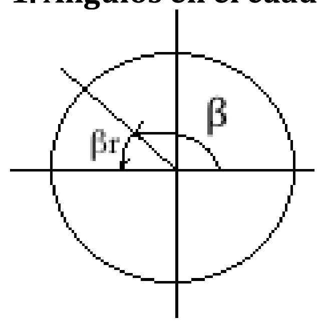
MÚLTIPLOS DE 30°



ÁNGULOS DE REFERENCIA

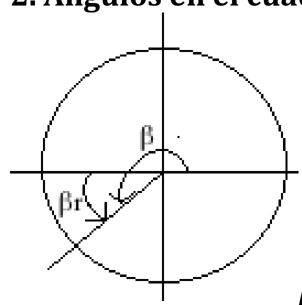
Sea β un ángulo en posición normal. Se llama <u>ángulo de referencia</u> β_r al ángulo agudo que forma el lado final del ángulo β con uno de los semiejes del eje x.

1. Ángulos en el cuadrante II



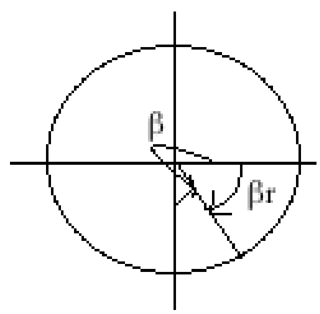
$$\beta r = 180° - \beta$$

2. Ángulos en el cuadrante III



$$\beta r = \beta - 180°$$

3. Ängulos en el cuadrante IV



$$\beta r = 360° - \beta$$

Ejercicios:

1. Hallar la medida del ángulo de referencia :

a) $\beta = \frac{5\pi}{4}$
b) $\delta = 150°$
c) $\propto = {4\pi}/{3}$
d) $\theta = 510°$
e) $\beta = -210°$

2. Calcular el valor de las funciones trigonométricas de los ángulos:

a. 120° **b.** 330° **c.** $\frac{7\pi}{4}$

d. -135° **e.** -405° **f.** $\frac{5\pi}{6}$

g. 315° **h.** $\frac{2\pi}{3}$

SIGNO DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS SEGÚN EL CUADRANTE

CUADRANTE/FUNCIÓN	sen	cos	tan	cot	sec	csc
I						
II						
III						
IV						

1. Cualquier razón trigonométrica de un ángulo en posición normal, cuyo lado terminal está en el cuadrante II es igual en valor absoluto a la misma razón trigonométrica del ángulo agudo formado entre el lado terminal y el semieje $-x$

Solamente las razones $\underline{\boldsymbol{seno\ y\ cosecante\ son\ positivas\ en\ el\ II\ cuadrante}}$.

$$\boldsymbol{sen\beta = sen(180° - \beta)} \qquad \boldsymbol{csc\beta = csc(180° - \beta)}$$
$$\boldsymbol{cos\beta = -cos(180° - \beta)} \qquad \boldsymbol{sec\beta = -sec(180° - \beta)}$$
$$\boldsymbol{tan\beta = -tan(180° - \beta)} \qquad \boldsymbol{cot\beta = -cot(180° - \beta)}$$

EJEMPLO

$$\boldsymbol{Sen\ 120° = sen(180° - 120°) = sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$
$$\boldsymbol{cos\ 120° = -cos(180° - 120°) = -cos\ 60° = -\frac{1}{2}}$$
$$\boldsymbol{tan\ 120° = -tan(180° - 120°) = -tan\ 60° = -\sqrt{3}}$$
$$\boldsymbol{cot\ 120° = -cot(180° - 120°) = -cot\ 60° = -\frac{\sqrt{3}}{3}}$$
$$\boldsymbol{sec\ 120° = -sec(180° - 120°) = -sec\ 60° = -2}$$
$$\boldsymbol{csc\ 120° = csc(180° - 120°) = csc\ 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

2. Cualquier razón trigonométrica de un ángulo en posición normal, cuyo lado terminal está en el cuadrante III es igual en valor absoluto a la misma razón trigonométrica del ángulo agudo formado entre el lado terminal y el semieje $-x$

Solamente las razones $\underline{\boldsymbol{tangente\ y\ cotangente\ son\ positivas\ en\ el\ III\ cuadrante}}$.

$$\boldsymbol{sen\beta = -sen(\beta - 180°)} \qquad \boldsymbol{csc\beta = -csc(\beta - 180°)}$$
$$\boldsymbol{cos\beta = -cos(\beta - 180°)} \qquad \boldsymbol{sec\beta = -sec(\beta - 180°)}$$
$$\boldsymbol{tan\beta = tan(\beta - 180°)} \qquad \boldsymbol{cot\beta = cot(\beta - 180°)}$$

3. Cualquier razón trigonométrica de un ángulo en posición normal, cuyo lado terminal está en el cuadrante IV es igual en valor absoluto a la misma razón trigonométrica del ángulo agudo formado entre el lado terminal y el semieje x

Solamente las razones $\underline{\boldsymbol{coseno\ y\ secante\ son\ positivas\ en\ el\ IV\ cuadrante}}$.

$$\boldsymbol{sen\beta = -sen(360° - \beta)} \qquad \boldsymbol{csc\beta = -csc(360° - \beta)}$$
$$\boldsymbol{cos\beta = cos(360° - \beta)} \qquad \boldsymbol{sec\beta = sec(360° - \beta)}$$
$$\boldsymbol{tan\beta = -tan(360° - \beta)} \qquad \boldsymbol{cot\beta = -cot(360° - \beta)}$$

EJERCICIO: Calcular las funciones trigonométricas de: $150°, \frac{3\pi}{4}, \ 210°, 240°, 300, 315, \frac{5\pi}{6}$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS NEGATIVOS

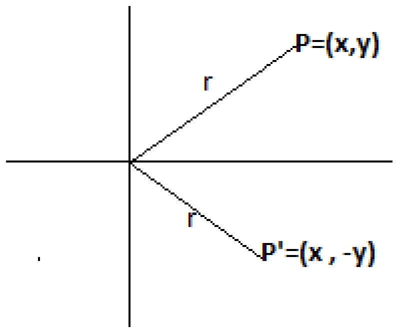


Figura 1

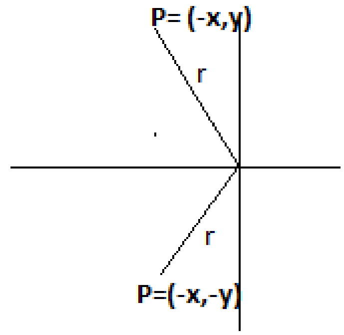


Figura 2

Figura 1

$sen\emptyset = \frac{y}{r} \quad y \quad sen\,(-\emptyset) = \frac{-y}{r} = -\frac{y}{r}$

$cos\,\emptyset = \frac{x}{r} \quad y \quad cos(-\emptyset) = \frac{x}{r}$

$tan\,\emptyset = \frac{y}{x} \quad y\; tan(-\emptyset) = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x}$

Figura 2

$sen\emptyset = \frac{y}{r} \quad y \quad sen\,(-\emptyset) = \frac{-y}{r} = -\frac{y}{r}$

$cos\,\emptyset = \frac{-x}{r} = -\frac{x}{r} \quad y \quad cos(-\emptyset) = \frac{-x}{r} = -\frac{x}{r}$

$tan\emptyset = \frac{y}{-x} = -\frac{y}{x} \quad y \quad tan(-\emptyset) = \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x}$

$$\textit{Para cualquier ángulo } \emptyset \textit{ se tiene}$$
$$sen(-\emptyset) = -sen\,\emptyset \qquad csc(-\emptyset) = -csc\emptyset$$
$$cos(-\emptyset) = cos\emptyset \qquad sec\,(-\emptyset) = sec\emptyset$$
$$tan\,(-\emptyset) = -tan\emptyset \qquad cot(-\emptyset) = -cot\emptyset$$

EJEMPLO: 1. Hallar $sen(-125°)$

$$\textit{Ángulo de referencia es } 180° - 125° = 55°$$
$$sen(-125°) = -sen(180° - 55°)°$$
$$= -sen\,55°$$
$$= -0,8192$$

2. Hallar $tan(-130°)$

$$\textit{Ängulo de referencia } 180° - 130° = 50°$$
$$tan(-130°) = tan\,50° = 1,1918$$

Como $-130°$ **está en el cuadrante III, la tangente es positiva**

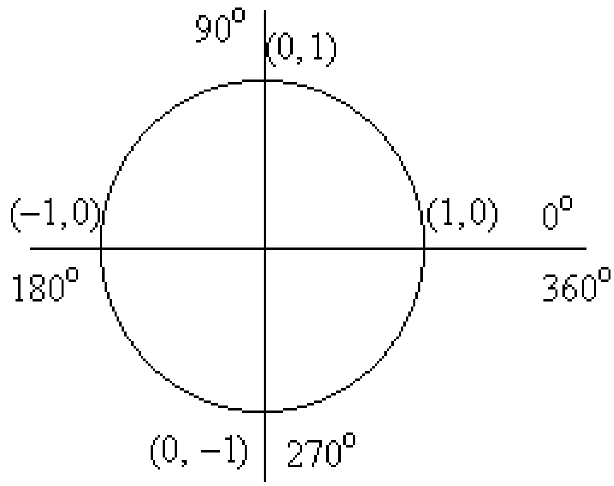
HALLAR LOS VALORES DE: $sen(-60°), \quad cos(-120°), \quad tan(-175°),$

$$cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right), \qquad sen(-\frac{3\pi}{4})$$

ÁNGULOS CUADRANTALES

Ángulo cuadrantal es aquel ángulo en posición normal cuyo lado terminal coincide con alguno de los semiejes del sistema coordenado cartesiano. Así son cuadrantales: 0°, 90° , 180° , 270° y 360°

$\operatorname{sen}\theta = y$
$\cos\theta = x$
$\tan\theta = y/x$
$\cot\theta = x/y$
$\sec\theta = 1/x$
$\csc\theta = 1/y$



3. BASADOS EN EL CÍRCULO TRIGONOMÉTRICO CALCULAR:

$\boldsymbol{sen\ 0° =}$ $\boldsymbol{sen 2\pi =}$ $\boldsymbol{\cos\frac{3\pi}{2} =}$ $\boldsymbol{sen\frac{\pi}{2} =}$

$\boldsymbol{\cos 0° =}$ $\boldsymbol{\cos 2\pi =}$ $\boldsymbol{sen\ \pi =}$ $\boldsymbol{\cos\frac{\pi}{2} =}$

$\boldsymbol{\tan 0° =}$ $\boldsymbol{sen\ \frac{3\pi}{2} =}$ $\boldsymbol{\cos\pi =}$ $\boldsymbol{\tan\frac{\pi}{2} =}$

$\boldsymbol{\tan\pi =}$ $\boldsymbol{\tan\frac{3\pi}{2} =}$ $\boldsymbol{\tan 2\pi =}$ $\boldsymbol{\cos(-\pi) =}$

$\boldsymbol{\cot 0° =}$ $\boldsymbol{\cot\frac{\pi}{2} =}$ $\boldsymbol{\cot\pi =}$ $\boldsymbol{\sec 0° =}$

$\boldsymbol{\tan(-2\pi) =}$ $\boldsymbol{\cot\frac{3\pi}{2} =}$ $\boldsymbol{\cot 2\pi =}$ $\boldsymbol{\csc\pi =}$

4. COMPLETAR LA SIGUIENTE TABLA

$\boldsymbol{\theta}$	$\boldsymbol{\theta\ rad}$	sen	cos	tan	cot	sec	csc
0°		**0**					
	$\pi/6$						
	$\pi/3$						
90°		**1**					
	$2\pi/3$						
	$5\pi/6$						
	π						
	$7\pi/6$						
	$4\pi/3$						
	$3\pi/2$						
	$5\pi/3$						
	2π		**1**				