NÚMEROS COMPLEJOS

Como sabemos, en R no podemos resolver raíces cuadradas de números negativos, como $\sqrt{-1}$, ya que no existe ningún número real cuyo cuadrado sea igual a –1.

Para eso definimos el símbolo **i** para indicar un número tal que: $\mathbf{i^2 = -1}$ **ó** $\mathbf{i = \sqrt{-1}}$

Teniendo en cuenta la igualdad a partir de la cual lo definimos, y que este número no es real, podemos usarlo para expresar las soluciones que no son reales de algunas ecuaciones.

Ej: $x^2 + 1 = 0$

$x^2 = -1$

$x_1 = i$ $\quad$ $x_2 = -i$

Ya que: $i^2 + 1 = 0$ y $(-i)^2 + 1 = 0$

$x^2 + 2 = 0$

$x^2 = -2$

$x_1 = \sqrt{2}\, i$ $\quad$ $x_2 = -\sqrt{2}\, i$

Ya que: $(\sqrt{2}\, i)^2 + 2 = 0$ y $(-\sqrt{2}\, i)^2 + 2 = 0$

<u>**Ejercicio 2:**</u> Utilicen el símbolo i para expresar las soluciones de las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + 4 = 0$ $\qquad$ b) $x^2 + 5 = 0$ $\qquad$ c) $x^2 - 10 = 2x^2$

d) $-x^2 - 9 = 0$ $\qquad$ e) $9x^2 + 16 = 0$ $\qquad$ f) $(x + 5)^2 = 10x$

g) $\frac{1}{x^2+4} - 1 = 1$ $\qquad$ h) $(x - 2)(-x - 2) = 20$ $\qquad$ i) $(x - 8)^2 = -16x$

j) $3(2 - 2x) = (x - 4)(x - 2)$ $\qquad$ k) $(2x^2 - 1)^2 = (1 + 2x)(1 - 2x) - 1$

<u>**Ejercicio 3:**</u> Completen la siguiente tabla:

Número Complejo Z	Parte Real Re (z)	Parte Imaginaria Im(z)	¿es complejo, real o imaginario puro?
5 + 3 i			
	2	8	
	– 4	2/3	
	1	–3	
$2 - \sqrt{3}\, i$			
5 i			
	0	4	
	4	0	
	0	0	

CONJUGADO Y OPUESTO DE UN NÚMERO COMPLEJO

A partir de un número complejo z = a + bi, se definen los siguientes:

* El conjugado de z es $\bar{z} = \boldsymbol{a - bi}$ (la parte real es igual y la parte imaginaria es opuesta)

* El opuesto de z es $\boldsymbol{-z = -a - bi}$ (la partwe real y la parte imaginaria son opuestas)

Ejemplos:

$z_1 = -1 - 2i$ $\qquad$ $\bar{z}_1 = -1 + 2i$ $\qquad$ $-z_1 = 1 + 2i$

$z_2 = 4i$ $\qquad$ $\bar{z}_2 = -4i$ $\qquad$ $-z_2 = -4i$

$z_3 = 6$ $\overline{z_3} = 6$ $-z_3 = -6$

Ejercicio 4: Completen el siguiente cuadro:

z	$\overline{z}$	– z
⅔ + ¾ i		
	2 – 6 i	
		$-7 + \sqrt{3}\ i$
	– 3	
		$-\sqrt{5}\ i$
	2 – ½ i	

OPERACIONES CON NÚMEROS COMPLEJOS

En los siguientes ejemplos pueden observar cómo sumamos, restamos, multiplicamos y dividimos números complejos:

Suma: (2 + 3 i) + (1 – 5 i) = (2 + 1) + (3 – 5) i = 3 – 2 i

Resta: (2 + 3 i) – (1 – 5 i) = (2 – 1) + (3 –(–5) i) = 1 + 8 i

Multiplicación: (2 + 3 i) . (1 – 5 i) = 2 . 1 + 2 . (–5i) + 3 i.1 + 3i .(–5i) =
= 2 – 10 i + 3 i – 15 i² = 17 – 7 i
(recordar que **i² = –1**)

División:
Para resolver la división de dos números complejos, siendo el divisor no nulo, multiplicamos a ambos por el conjugado del divisor, del siguiente modo:

$$\frac{2+3i}{1-5i} = \frac{2+3i}{1-5i}.\frac{1+5i}{1+5i} = \frac{2+10i+3i+15i^2}{1^2-(5i)^2} = \frac{-13+13i}{1+25} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$$

Multiplicar por una fracción de igual numerador y denominador es como multiplicar por 1, por lo tanto, la igualdad no se altera.

Ejercicio 10: Consideren los complejos: $z_1 = -2 + i$; $z_2 = 3 + 5\,i$; $z_3 = 4 - i$ y resuelvan las siguientes operaciones:

a) $z_1 + z_2 - z_3 =$ b) $z_1 + \overline{z_2} - z_3 =$ c) $\overline{z_1} - \overline{z_3} =$ d) $5.\ z_3 =$
e) $(z_1 + z_2).\,z_3 =$ f) $(-\ z_1 + \overline{z_2}).(\overline{z_1} - z_3) =$ g) $z_1 .\ z_2 - z_3 =$ h) $(z_3)^2 =$

Ejercicio 11: Consideren los complejos: $z_1 = 3 - i$; $z_2 = -4\,i$; $z_3 = 7 + 2\,i$ y resuelvan las siguientes divisiones:

a) $\frac{z_2}{z_1} =$ b) $\frac{z_1}{z_3} =$ c) $\frac{z_3}{z_2} =$ d) $\frac{z_2}{z_3} =$ e) $16.\frac{\overline{z_3}}{\overline{z_2}} =$ f) $\frac{1}{z_1} =$

Ejercicio 12: Completen las potencias de i:

$i^0 =$ $i^1 =$ $i^2 =$ $i^3 =$

$i^4 =$ $i^5 =$ $i^6 =$ $i^7 =$

EJERCITACIÓN

14) Adición y Sustracción de Números Complejos:

a) (10 + 3 i) + (8 + 2 i) + (4 + 5 i) = R: (22, 10)

b) (7 + 5 i) – (3 – 4 i) – (– 5 + 2 i) = R: (9 , 7)

c) (1 + ½ i) + (3 – 3/2 i) + (– 4 + i) = R: (0)

d) $(-8+\frac{3}{5}i)+(-\frac{7}{4}+\frac{7}{10}i)+(-\frac{1}{4}-\frac{3}{10}i)=$ R: (– 10 + i)

e) $(\frac{2}{5}+i)+(\frac{4}{3}-\frac{3}{4}i)+(\frac{2}{15}+\frac{1}{4}i)+(-\frac{28}{15}-\frac{3}{2}i)=$ R: (– i)

f) $(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2})+(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2})+(\frac{\sqrt{2}}{2}+i)+(\frac{\sqrt{2}}{2}-i)=$ R: ($\sqrt{3}+\sqrt{2}$)

15) Multiplicación y División de Números Complejos:

a) (10 + 2 i) . (3 + 15 i) = R: (156 i)

b) (– 5 + 2 i) . (5 + 2 i) = R: (– 29)

c) (– 1 + i) . (– 1 – i) = R: (2)

d) $-\frac{3}{5}i.\frac{4}{3}i=$ R: (4/5)

e) ($\sqrt{2}+\sqrt{3}$ i) . ($\sqrt{3}+\sqrt{2}$ i) = R: (5 i)

f) $(\frac{\sqrt{2}}{2}+i).(\frac{2}{3}+4i).(\frac{\sqrt{2}}{2}-i)=$ R: (1 + 6 i)

g) (– 4 + 2 i) : (1 + i) = R: (– 1 + 3 i)

h) (– 1 + i) : (– 1 – i) = R: (– i)

i) (4 + 2 i) : i = R: (2 – 4 i)

j) $(-\frac{1}{4}+\frac{2}{5}i):(\frac{2}{5}+\frac{1}{4}i)=$ R: (i)

k) ($\sqrt{2}+\sqrt{3}$ i) : ($\sqrt{2}-\sqrt{3}$ i) = R: $(-\frac{1}{5}+\frac{2\sqrt{6}}{5}i)$