$ANTIDERIVADAS\ E\ INTEGRALES\ INDEFINIDAS$

$ANTIDERIVADA$: $Una\ función\ F\ se\ llama\ antiderivada\ de\ una\ función\ f, en\ un\ intervalo\ I, si\ F'(x) = f(x)\ para\ todo\ valor\ de\ x\ en\ I.$

$Ejemplo$:

$Si\ F\ se\ define\ como$: $F(x) = 4x^3 + x^2 + 5\ Entonces\ f'(x) = 12x^2 + 2x,$

$Luego\ al\ definir\ f(x) = 12x^2 + 2x, se\ tiene\ que\ f(X) es\ la\ derivada\ de\ F(x), por\ lo\ tanto, F(x) es\ la\ antiderivada\ de\ f(x).$

$Del\ mismo\ modo\ si\ G(x) = 4x^3 + x^2 + 12, entonces\ G(x)también\ es\ una\ antiderivada\ de\ f(x)porque\ G'(x) = 12x^2 + 2x$

$Es\ posible\ encontrar\ varias\ funciones\ que\ son\ primitivas\ de\ la\ función\ f(x),\ de\ tal\ forma\ que\ al\ derivarlas\ se\ obtiene\ f(x).\ La\ forma\ general\ de\ todas\ las\ antiderivadas\ de\ f(x) es\ F(x) + C, siendo\ C\ una\ constante.$

$INTEGRAL\ INDEFINIDA$: $La\ antiderivación\ es\ el\ proceso\ mediante\ el\ cual\ es\ posible\ obtener\ el\ conjunto\ de\ todas\ las\ antiderivadas\ de\ una\ función\ dada.$

$Al\ conjunto\ de\ todas\ las\ antiderivadas\ de\ f(x) se\ le\ denomina\ INTEGRAL\ INDEFINIDA\ de\ f(x) y\ se\ simboliza$ $\int f(x)dx = F(x) + C$

$PROPIEDADES\ DE\ LA\ INTEGRAL\ INDEFINIDA$

$$\boxed{\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, si\ n \neq -1}$$

$$\boxed{\int kf(x)dx = k\int f(x)dx}$$

$Ejemplos$: 1. $\int 2x^3\,dx = 2\int x^3\,dx = 2\int \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{2x^4}{4} + C = \frac{x^4}{2} + C$

2. $\int \frac{1}{x^2}\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$

$$\boxed{\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)dx}$$

$Ejemplo$: $\int (3x+5)\,dx = \int 3x\,dx + \int 5\,dx$

$$= 3\int x\,dx + 5\int dx$$

$$= \frac{3x^{1+1}}{1+1} + 5x + C = \frac{3x^2}{2} + 5x + C$$

Ejemplos

1. **Calcular las siguientes integrales.**

a. $\int (2x^2 - 3x + 5)dx$

$\int (2x^2 - 3x + 5)dx$

$= \int 2x^2\,dx - \int 3x\,dx + \int 5\,dx$ *Se aplican las propiedades de la integral.*

$= 2\int x^2\,dx - 3\int x\,dx + 5\int dx$

$= 2\left(\frac{x^3}{2}\right) - 3\left(\frac{x^2}{2}\right) + 5x + C$ *Se usan integrales inmediatas.*

$= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + C$ *Se simplifica.*

Por tanto,

$\int (2x^2 - 3x + 5)dx = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5 + C$

b. $\int\left(\frac{x^6}{3} + \frac{2}{x^3}\right)dx$

$\int\left(\frac{x^6}{3} + \frac{2}{x^3}\right)dx = \int \frac{x^6}{3}dx + \int \frac{2}{x^3}dx$

$= \frac{1}{3}\int x^6\,dx + 2\int \frac{1}{x^3}dx$ *Se aplican las propiedades de la integral.*

$= \frac{1}{3}\int x^6\,dx + 2\int x^{-3}dx$

$= \frac{1}{3}\left(\frac{x^7}{7}\right) + 2\left(\frac{x^{-2}}{-2}\right) + C$ *Se expresa $\frac{1}{x^{-3}}$ como x^{-3}.*

$= \frac{x^7}{21} - x^{-2} + C$ *Se usa integrales inmediatas.*

$= \frac{x^7}{21} - \frac{1}{x^2} + C$ *Se simplifica.*

Por tanto, $\int\left(\frac{x^6}{3} + \frac{2}{x^3}\right)dx = \frac{x^7}{21} - \frac{1}{x^2} + C.$

c. $\int \frac{8x^5 - 4\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}dx$

$\int \frac{8x^5 - 4\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{8x^5}{x^{1/2}}dx - \int \frac{4x^{1/3}}{x^{1/2}}dx$

$= 8\int x^{9/2}\,dx - 4\int x^{-1/6}\,dx$

$= 8\,\frac{x^{11/2}}{\frac{11}{2}} - 4\,\frac{x^{5/6}}{\frac{5}{6}} + C$

Por tanto,

$\int \frac{8x^5 - 4\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}dx = \frac{16}{11}\sqrt{x^{11}} - \frac{24}{5}\sqrt[6]{x^5} + C$

d. $\int \frac{\operatorname{sen} x}{4} + \frac{3^x}{5}\,dx$

$\int \frac{\operatorname{sen} x}{4} + \frac{3^x}{5}\,dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{4}dx + \int \frac{3^x}{5}dx$

$= \frac{1}{4}\int \operatorname{sen} x\,dx + \frac{1}{5}\int 3^x\,dx$

$= \frac{1}{4}(-\cos x) + \frac{1}{5}\left(\frac{3^x}{\ln a}\right) + C$

$= -\frac{1}{4}\cos x + \frac{3^x}{5\ln a} + C$

e. $\int \frac{6}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{12}{1 + x^2}\,dx$

$\int \frac{6}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{12}{1 + x^2}\,dx$

$= \int \frac{6}{\sqrt{1 - x^2}}dx + \int \frac{12}{1 + x^2}dx$

$= 6\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}dx + 12\int \frac{1}{1 + x^2}dx$

$= 6 \operatorname{arc\,sen} x + 12 \operatorname{arc\,tan} x + C$

f. $\int (\tan^2 x + 1)\operatorname{sen} x\,dx$

$\int (\tan^2 x + 1)\operatorname{sen} x\,dx = \int \sec^2 x \operatorname{sen} x\,dx$

$= \int \sec x \tan x\,dx$

$= \sec x + C$

5. **Responder teniendo en cuenta que $f(x) = x + 1$ y $g(x) = 2x^3$.**

¿Es cierto que $\int [f(x)\cdot g(x)]dx$ es $\int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$?

$\int [f(x)\cdot g(x)]dx = \int (x + 1)(2x^3)dx$

$= 2\int (x^4 + x^3)dx$

$= 2\int x^4dx + 2\int x^3dx = \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + C$

$\int f(x)dx \cdot \int g(x)dx = \left(\frac{x^2}{2} + x + C\right)\left(\frac{1}{2}x^4 + C\right)$

$= \frac{1}{4}x^6 + \frac{1}{2}x^5 + C$

Como $\int [f(x)\cdot g(x)]dx = \frac{2}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + C$ y

$\int f(x)dx \cdot \int g(x)dx = \frac{1}{4}x^6 + \frac{1}{2}x^5 + C$

son diferentes, entonces es falsa.