Edición Revisada hasta el 1 de Marzo de 2009

Apuntes de preparación para la

PRUEBA DE SELECCIÓN UNIVERSITARIA

M A T E M Á T I C A

2009

Pamela Paredes Núñez
Manuel Ramírez Panatt

ESTUDIANTES DE LICENCIATURA EN CIENCIAS EXACTAS
FACULTAD DE CIENCIAS, UNIVERSIDAD DE CHILE

♠

APUNTES DE PREPARACIÓN PARA LA PRUEBA
DE SELECCIÓN UNIVERSITARIA MATEMÁTICA.

© AUTORES
Pamela Paredes Núñez
Manuel Ramírez Panatt

DISEÑO Y DIAGRAMACIÓN
Manuel Ramírez Panatt

PRIMERA EDICIÓN
Abril de 2008

SEGUNDA EDICIÓN
Marzo de 2009

Registro de Propiedad Intelectual N°171.533

Santiago, Chile.

Las ediciones de este documento se mantendrán actualizadas en la web `http://zeth.ciencias.uchile.cl/~manramirez`

Simbología Matemática

$<$	es menor que	$=$	es igual a
$>$	es mayor que	$\neq$	es distinto de
$\leq$	es menor o igual que	$\equiv$	es equivalente a
$\geq$	es mayor o igual que	$\sim$	es semejante a
$\perp$	es perpendicular a	$\cong$	es congruente con
$//$	es paralelo a	$\in$	pertenece a
$\measuredangle$	ángulo	$\notin$	no pertenece a
$\subset$	contenido en	$\overline{AB}$	trazo AB
$\forall$	para todo	$\exists$	existe
$\Rightarrow$	implica	$\cup$	unión entre conjuntos
$\Leftrightarrow$	si y solo si (doble implicancia)	$\cap$	intersección entre conjuntos

Y para nuestro libro...

$\spadesuit$	Ejemplos	$\clubsuit$	Actividades
$\diamondsuit$	Observaciones		

Índice general

Presentación

La Prueba de Selección Universitaria parte Matemática, es una de las pruebas obligatorias aplicadas en el proceso de selección a las Universidades llamadas tradicionales. Esta prueba permite determinar el nivel de habilidad en el razonamiento matemático y conocimientos que posee cada postulante a la educación superior y si éstos son los adecuados para que prosiga en estudios superiores.

En particular, la PSU parte Matemática mide las capacidades del postulante para reconocer los conceptos, principios, reglas y propiedades de la matemática, identificar y aplicar métodos matemáticos en la resolución de problemas, analizar y evaluar información matemática proveniente de otras ciencias y de la vida cotidiana y por último analizar y evaluar las soluciones de un problema para fundamentar su pertinencia.

Para medir correctamente éstos procesos, el equipo técnico de matemática del DEMRE elabora una prueba de 70 preguntas divididades en 4 grandes ejes temáticos estudiados en la matemática de enseñanza media. Las preguntas se subdividen aproximadamente en 11 del primer eje temático *Números y Proporcionalidad*, 29 del segundo eje temático *Álgebra y Funciones*, 21 del tercer eje temático *Geometría* y 9 del último eje temático *Probabilidad y Estadística*.

El libro que tienes en tus manos contiene la mayoría de los contenidos que se evaluarán en la prueba, las materias se estudiarán en su totalidad en las clases del preuniveristario, aprovecha éste documento leyendo lo que corresponda antes de cada clase para que ésta pueda ser más fluida y productiva sirviendo de complemento a tus conocimientos.

Los Autores

Estimado lector:
Si tiene algún aporte o crítica sobre el contenido de este libro, le agradecemos comunicarlo a los correos,

pparedes@zeth.ciencias.uchile.cl
Pamela Paredes Núñez

manramirez@zeth.ciencias.uchile.cl
Manuel Ramírez Panatt

Parte I

Apuntes de Preparación para la Prueba de Selección Universitaria Matemática

Capítulo 1

Números

Junto con la historia de la humanidad, la historia de las matemáticas y la numeración a evolucionado optimizándose cada vez más. En muchas culturas distintas se realizó la numeración de variados modos pero todos llegaban a una misma solución, definir una unidad y aumentarla en conjunto con el conteo, y posteriormente, cuando ya existía una cantidad incómoda de representar se involucraba un nuevo símbolo que representaba a todas las unidades anteriores, a éste último símbolo se le conoce como base, y sin lugar a duda la base más usada ha sido la base de 10, como lo hace el sitema de numeración que ocupamos actualmente, aparentemente a causa que tenemos 10 dedos y cada dedo representa una unidad y la manera más primitiva de contar.

Versión 1.0, Junio de 2007

1.1. Conjuntos

Cuando nos comunicamos en nuestra vida cotidiana y utilizamos el término "conjunto", seguramente nos estamos refiriendo a un grupo de objetos de alguna naturaleza determinada. Bueno, en matemáticas esta expresión no está para nada alejada de lo que tu entiendes por un conjunto, la diferencia radica en que los conjuntos que aprenderemos son aquellos que están formados por nada más ni nada menos que números. Los números son elementos fundamentales en el estudio de las matemáticas, ya que gracias a ellos se pueden precisar o determinar exactamente respuestas a algunas de las preguntas del ser humano, es por esto que es tan importante analizarlos, trabajarlos y lo que haremos en este capítulo, agruparlos.

1.1.1. Subconjuntos

Los subconjuntos son esencialmente conjuntos, pero el prefijo sub. que aparece delante nos infiere que existe un conjunto más grande del que estamos hablando. Uno en el cual nuestro subconjunto esta contenido. Por ejemplo; si queremos formar el conjunto formado por todas las personas involucradas en nuestro preuniversitario, encontraremos en el a profesores, alumnos y coordinadores, y un subconjunto de este sería el grupo de todos los profesores, ya que éstos por si solos forman un conjunto, pero éste está contenido en el primer conjunto nombrado.

1.1.2. Representación

Para representar un conjunto cualquiera, generalmente se usa una línea que encierra a un grupo de cosas, las cuales, forman el conjunto. Una manera análoga es ordenarlos, separados de comas y entre paréntesis de llave ($\{\}$)[1] esta última notación es la que utilizaremos frecuentemente.

[1] Ejemplo de un conjunto $\mathcal{A}$=$\{$a,b,c,d,e$\}$

1.1.3. Cardinalidad

Cuando queremos hablar de cantidades dentro de los conjuntos, o aclarar si un conjunto es más grande o no que otro, introducimos un término que llamamos cardinalidad, la cual representamos por el símbolo #, ésta solo depende del número de objetos de nuestro conjunto.

Por ejemplo, la cardinalidad del conjunto de la figura 1.1 es 4.

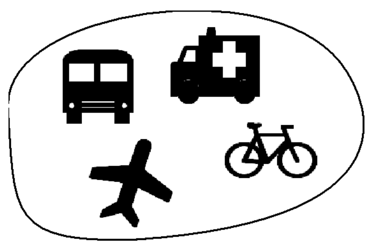


Figura 1.1: Conjunto de objetos

1.2. Conjuntos Numéricos

Son todos aquellos conjuntos que están formados por números, éstos se dividen principalmente en:

1.2.1. Números Naturales

Los números naturales son los que normalmente ocupamos para contar, se representan por el símbolo $\mathbb{N}$. Y sus elementos son:

$$\boxed{\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots \infty\}}$$

- **Algunos subconjuntos de $\mathbb{N}$ son:**
  - Los números pares $= \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \ldots \infty\}$, éstos los podemos representar como $2n \forall\ n \in \mathbb{N}$
  - Los números impares $= \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots \infty\}$, los cuales los podemos representar como $(2n + 1)$ o $(2n - 1) \forall\ n \in \mathbb{N}$
  - Los números primos $= \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots \infty\}$, son todos aquellos números que son divisibles solo por si mismos y por 1, excluyendo a éste último.
  - Los números compuestos, Son todos aquellos que NO son primos.
  - etc. . .

◊ *Observa que...*

† *La cardinalidad de $\mathbb{N}$ es infinita.*

† *Este conjunto es "cerrado" bajo la suma y la multiplicación, es decir, para todo par de números en $\mathbb{N}$, su suma y su multiplicación también es un número natural.*

† *Este conjunto NO es "cerrado" bajo la resta y la división, ya que para todo par de números en $\mathbb{N}$, su diferencia y división NO es necesariamente un número natural.*

† *2 es el único número par que es primo.*

1.2.2. Números Cardinales

Cuando en el conjunto de los números naturales incluimos el 0, se denomina como Números Cardinales, se representa por el símbolo $\mathbb{N}_0$, y sus elementos son:

$$\boxed{\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots \infty\}}$$

- **Algunos subconjuntos de $\mathbb{N}_0$ son:**
  - Los números Naturales y todos los subconjuntos de éste.
  - Los dígitos; $= \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

1.2.3. Números Enteros

Es el conjunto formado por todos los números sin cifra decimal, es decir, los numeros naturales, sus inversos aditivos[2], y el neutro aditivo[3].

$$\boxed{\mathbb{Z} = \{-\infty \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots \infty\}}$$

- **Algunos subconjuntos de $\mathbb{Z}$ son:**
  - Los números Naturales.
  - Los números Cardinales.
  - etc...

◊ *Observa que...*

A diferencia de los números Naturales, este conjunto si es "cerrado" bajo la suma, la resta y la multiplicación; es decir, para todo par de números enteros, su suma, multiplicación y diferencia es siempre un número entero.

Pero como el mundo no es tan bello, éste conjunto no conserva a la división, ya que una división entre dos números enteros no es necesariamente un número de $\mathbb{Z}$

[2] Se dice que un número a tiene inverso aditivo, si existe un b tal que, $a + b = 0$, tal b es también conocido como $-a$.

[3] Para cualquier número x existe un único que cumple que $x+$(ese único)$= x$, a ese número lo conocemos como neutro aditivo, (también conocido como 0).

1.2.4. Números Racionales

Como te habrás dado cuenta en los conjuntos anteriormente mencionados, tenemos el problema de que sus elementos se pueden "escapar" facilmente de ellos, nos referimos a que basta que dos números Naturales se resten ($4-5$, por ejemplo), para obtener algún número negativo y entonces ya estaremos fuera de $\mathbb{N}$, o para el caso de los enteros, basta que dos de ellos que no sean divisibles entre si (-3 y 2, por ejemplo), se dividan y entonces ya no tendremos un número entero.

Para resolver éste problema, existe el conjunto de los números Racionles, representados por el símbolo $\mathbb{Q}$ y que cumple que para cada par de números racionales, la suma, resta, división y multiplicación (sin considerar al 0), es siempre un número de $\mathbb{Q}$, a éste tipo de conjuntos se les conoce como **Cuerpo**. Lo podemos representar como:

$$\boxed{\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}}$$

Para cada elemento de éste cuerpo aparecen en el mismo, los llamados inversos multiplicativos, que son aquellos que al multiplicarse por el elemento obtenemos el 1 (neutro multiplicativo). Por ejemplo: $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$, por lo tanto el inverso multiplicativo de 5 es $\frac{1}{5}$, o $\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} = 1$, por lo tanto el inverso multiplicativo de $\frac{3}{4}$ es $\frac{4}{3}$.

Existen distintas formas de expresar los elementos de este conjunto.

Forma Fraccionaria

Ésta forma nos expresa "porciones" de algún entero. En su estructura tenemos una línea fraccionaria, un numerador (número sobre la línea fraccionaria), y un denominador (número bajo la línea fraccionaria). El denominador nos indica la cantidad de partes en que dividimos un entero y el numerador nos muestra cuantas de ellas vamos a considerar.

Por ejemplo:

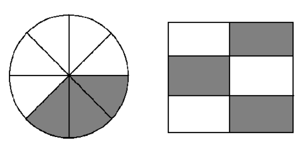


Figura 1.2: Representaciones Fraccionarias

En el primer caso dividimos un círculo en 8 partes iguales, y de ellas ocupamos 3, lo cual representamos por: $\frac{3}{8}$. Y en el segundo caso dividimos un rectángulo en 6 partes iguales, considerando sólo 3 de ellas, lo cual representamos por: $\frac{3}{6}$

Forma Mixta

Hay ocasiones en que el numerador de una fracción es mayor que el denominador. En éstas situaciones dividimos el numerador por el denominador, del resultado de esta división consideramos el cuociente como la parte entera, y el resto como numerador de la fracción que la acompaña.

Por ejemplo:

Consideremos la fracción $\frac{8}{5}$, entonces al efectuar la división se tiene.

$$\begin{array}{rcl} 8 & \div & 5 = 1 \\ & & 3. \end{array}$$

Por lo tanto podemos escribir esta fracción como: $\frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$.

Forma Decimal

Toda fracción tiene su representación como número decimal, para obtenerlo basta dividir, sin dejar resto, el numerador con el denominador.

Por ejemplo, consideremos la fracción $\frac{5}{4}$:

$$\begin{array}{rcl} 5 & \div & 4 = 1,25 \\ & & 10 \\ & & \;\;20 \\ & & \;\;\;\;0. \end{array}$$

Para pasar un número decimal a fracción existen 3 posibles casos:

1. **Con Decimales Finitos**

   Es decir, cuándo las cifras decimales de un número son finitas, por ejemplo 4,376 es un decimal finito pues tiene solo 3 dígitos despues de la coma, pero 4,333333333333... con infinitos 3, uno tras otro, no es un decimal finito pues tiene infinitos dígitos despues de la coma.

   La manera de pasar este tipo de decimales a fracctión es simplemente escribir una fracción cuyo númerador sea el mismo número pero sin coma, y cuyo denominador sea 10000... con tantos ceros como dígitos tiene el número despues de la coma, por ejemplo:

   - ♠ $\underbrace{5,326}_{3 \text{ dígitos}} = \frac{5626}{1000}$
   - ♠ $\underbrace{2,32}_{2 \text{ dígitos}} = \frac{232}{100}$
   - ♠ $\underbrace{1,3}_{1 \text{ dígitos}} = \frac{13}{10}$

   Esto es dibido a que cuando uno divide por 10, 100, 1000, etc, lo único que le sucede al dividendo es que se corre la coma hacia la izquierda tantos espacios como ceros posee el divisor.

2. **Decimales Periódicos**

   Los decimales periódicos son aquellos en que los números despues de la coma se repiten infinitamente sin alterar su orden, por ejemplo:

   - ♠ 1,3333333333333333... es un número decimal donde el 3 se repite infinitas veces despues de la coma, este número lo escribiremos de la forma: $1,\overline{3}$.
   - ♠ 4,324324324324324324... es un número decimal donde el número 324 se repite infinitamente despues de la coma, este número lo escribiremos de la forma: $4,\overline{324}$

♠ 2,56565656723214569875... es un número cuyos decimales no tienen ninguna relación por lo tanto se dice que NO es un decimal periódico.

La fracción que representa a estos decimales es aquella cuyo numerador es el número escrito sin coma ni linea periódica menos la parte entera dividido por 9999... con tantos 9 como decimales periódicos halla, por ejemplo:

♠ $1,\overline{32} = \frac{132-1}{99} = \frac{131}{99}$

♠ $1,\overline{586} = \frac{1586-1}{999} = \frac{1585}{999}$

♠ $6,\overline{2} = \frac{62-6}{9} = \frac{56}{9}$

♠ $12,\overline{432} = \frac{12432-12}{999} = \frac{12420}{999}$

3. Decimales Semiperiódicos

Los decimales semiperiódicos son aquellos en que hay cifras decimales que aparecen solo una vez y las demás se repiten infinitamente, por ejemplo:

♠ 1,233333333333333... es un número decimal donde el 3 se repite infinitas veces despues del 1, este número lo escribiremos de la forma: $1,2\overline{3}$.

♠ 3,3211111111111111111... es un número decimal donde el número 1 se repite infinitamente despues del 32, este número lo escribiremos de la forma: $3,32\overline{1}$

♠ 2,532323232323232323232... es un número decimal donde el número 32 se repite infinitamente despues del 5, este número lo escribiremos de la forma: $2,5\overline{32}$

La fracción que representa a estos decimales es aquella cuyo numerador es el número escrito sin coma ni linea periódica menos la parte no periódica del número, dividido por 9999...0000... con tantos 9 como decimales periódicos halla y tantos ceros como dígitos no peródicos halla despues de la coma, por ejemplo:

♠ $1,3\overline{2} = \frac{132-13}{90} = \frac{119}{90}$

♠ $2,56\overline{1} = \frac{2561-256}{900} = \frac{2305}{900}$

♠ $6,1\overline{23} = \frac{6123-61}{990} = \frac{6062}{990}$

♠ $12,0\overline{6} = \frac{1206-120}{90} = \frac{1086}{90}$

- **Algunos subconjuntos de $\mathbb{Q}$ son:**
  - Los números Naturales, ya que todo número natural n lo podemos escribir como $\frac{n}{1}$.
  - Los números Cardinales.
  - Los números Enteros ya que todo número entero z lo podemos escribir como $\frac{z}{1}$.
  - etc...

1.2.5. Números Irracionales

Es el conjunto de todos los números que no pertenecen al mundo de los racionales, es decir no se pueden escribir como fracción ya que tienen infinitos decimales sin ninguna relación. Una forma de enunciar sus elementos es:

$$\boxed{\mathbb{I} = \{\ i \mid i \not\in \mathbb{Q}\}}$$

Algunos elementos de éste conjunto son: $\pi, e, \sqrt{2}, etc\ldots$

◇ *Observa que . . .*

Entre el conjunto de los números racionales y el de los irracionales no existe ningún elemento en común.

Además, NO es un cuerpo, ya que sus elementos al sumarse, restarse, multiplicarse, o dividirse pueden obtener un número racional, como por ejemplo; $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$, *y* 1 *no es un número irracional.*

1.2.6. Números Reales

Es el conjunto que obtenemos entre la unión de todos los conjuntos que acabamos de ver, pero como te habrás dado cuenta, en los números racionales están ya incluidos los naturales y los enteros, entonces basta decir que:

$$\boxed{\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}}$$

En la figura 1.3 puedes observar gráficamente éste hecho.

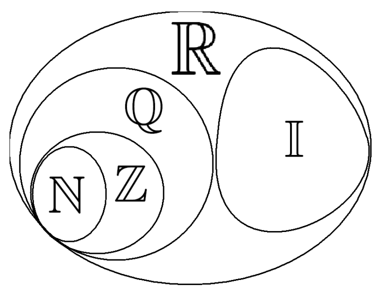


Figura 1.3: Diagrama de los conjuntos numéricos básicos

1.3. Operatoria con los números Reales

1.3.1. Axiomas de Cuerpo

1. **Conmutatividad**:

   Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, se cumple que:

   $$a + b = b + a \qquad \text{y} \qquad a \cdot b = b \cdot a$$

2. **Asociatividad**:

   Para todo a, b y $c \in \mathbb{R}$, se cumple que:

   $$a + (b + c) = (a + b) + c \qquad \text{y} \qquad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

3. **Distributividad**:

   Para todo a, b y $c \in \mathbb{R}$, se cumple que:

   $$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

1.3.2. Mínimo Común Múltiplo

El mínimo común múltiplo (M.C.M), entre dos o más números reales es el número más pequeño entre todos los múltiplos que tengan en común. Por ejemplo, para determinar el M.C.M entre 4 y 6 veamos los conjuntos de sus múltiplos.

$\rightarrow$ Múltiplos de 4 $= \{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, \ldots\}$

$\rightarrow$ Múltiplos de 6 $= \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, \ldots\}$

$\rightarrow$ Y la intersección entre éstos dos conjuntos es $= \{\mathbf{12}, 24, 36, 48, \ldots\}$

Luego, como el mínimo de éste último conjunto es 12, entpnces el M.C.M. entre 4 y 6 es 12.

Otra forma de determinar el M.C.M. es con la siguiente tabla:

$$\begin{array}{cc|c}
4 & 6 & \div 2 \\ \hline
2 & 3 & \div 2 \\
1 & 3 & \div 3 \\
 & 1 &
\end{array}$$

Donde se va dividiendo a los números hasta obtener el 1 para ambos, luego el M.C.M. será la multiplicación entre los divisores usados.

De manera que obtenemos:

$$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

1.3.3. Máximo Común Divisor

Cuando nos referimos al divisor de un número real estamos hablando de un número que divide exactamente (sin dejar resto) al número en cuestión. El máximo común divisor (M.C.D) entre dos o más números reales es el divisor más grande que tienen en común. Por ejemplo, busquemos el máximo común divisor entre 16 y 40, para ello necesitamos conocer los conjuntos de sus respectivos divisores.

$\rightarrow$ Divisores de 16 $= \{1, 2, 4, 8, 16\}$

$\rightarrow$ Divisores de 40 $= \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40\}$

$\rightarrow$ Y la intersección entre éstos dos conjuntos es $= \{1, 2, 4, \mathbf{8}\}$

Por lo tanto el M.C.D. entre 16 y 40, es 8.

$\diamondsuit$ *Observa que ...*

El mínimo común múltiplo y el máximo común divisor entre dos o más números enteros siempre existe, ya que en el peor de los casos el M.C.M será la multiplicación entre ellos, y el M.C.D. será el 1.

1.3.4. Reglas de Multiplicidad y Divisibilidad

Para multiplicar o dividir números reales debes tener en cuenta que su signo (positivo o negativo), importa mucho al momento de operarlos. Para esto siempre considera la siguiente tabla:

$+$	$\cdot$	$+$	$=$	$+$
$-$	$\cdot$	$-$	$=$	$+$
$+$	$\cdot$	$-$	$=$	$-$
$-$	$\cdot$	$+$	$=$	$-$

O si te es más sencillo, considera la palabra "amigo" como positivo $(+)$, y "enemigo" como negativo $(-)$, y recuerda que:

- "El amigo de mi amigo es mi amigo"
- "El enemigo de mi enemigo es mi amigo"
- "El amigo de mi enemigo es mi enemigo"
- "El enemigo de mi amigo es mi enemigo"

Además para que te sea más fácil la obtención de divisores o múltiplos comunes es bueno tener presente que:

- Todos los números son divisibles por 1.
- Los números divisibles por 2, son todos aquellos cuyo último dígito es par o 0.
- Los números divisibles por 3, son todos aquellos que cumplen que la suma de sus dígitos es divisible por 3.
- Los números divisibles por 4, son todos cuyos últimos dos dígitos forman un número divisible por 4.
- Los números divisibles por 5, son todos aquellos que terminan en 5 o 0.
- Los números divisibles por 6, son todos aquellos que son divisibles por 2 y por 3 al mismo tiempo.

1.3.5. Orden Operatorio

Siempre al momento de desarrollar un ejercicio donde aparezcan sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, potencias, etc, debes tener presente que existe una prioridad en el desarrollo de éstas, es decir; hay operaciones que deben realizarse antes que otras para obtener el resultado correcto. Éste orden es el siguiente:

1. Potencias.
2. Multiplicaciones y divisiones.
3. Sumas y restas.

Además si aparecen paréntesis dentro de algún ejercicio nos indicará que debemos realizar primero las operaciones que están dentro de él.

Por ejemplo:

$$6 + 4 \cdot (14 - 2^2 \cdot 3) - 26 \div 2$$

Primero debemos realizar el paréntesis (la potencia, luego la multiplicación y después la resta). Luego la multiplicación por 4 y la división $26 \div 2$. Posteriormente terminamos con las sumas y restas. Entonces se vería algo así:

$$\begin{aligned}
6 + 4 \cdot (14 - 2^2 \cdot 3) - 26 \div 2 &= 6 + 4 \cdot (14 - 4 \cdot 3) - 26 \div 2 \\
&= 6 + 4 \cdot (14 - 12) - 26 \div 2 \\
&= 6 + 4 \cdot (2) - 26 \div 2 \\
&= 6 + 8 - 26 \div 2 \\
&= 6 + 8 - 13 \\
&= 14 - 13 \\
&= 1
\end{aligned}$$

♣ *Actividad 1.1.*

Resuelve los siguientes ejercicios combinados:

1. $-(2 + (3 \cdot 3 + 5)) =$
2. $(6 \div 3 - (1 + 2 \cdot 3 - 1)) \cdot 2 =$
3. $-(65 - [2 - (10 \div 2)] + (5 \cdot 3 \div 5)) =$
4. $5 \cdot (10 + 3 \cdot 3 + 48 \div 6 - 7) =$
5. $(6 \cdot 2 \cdot 3 - [2 \cdot (-45) + 112]) =$
6. $-\langle -[-(12 \div 4 + 5)] \rangle + 1 =$
7. $-[-3 + 4 \cdot 3 - 4 - (-5 + 2)] =$
8. $-(-(2 + 3) - (3 \cdot 6 + 5) + 2) =$

1.3.6. Operaciones con Fracciones

Multiplicación de Fracciones

Multiplicar fracciones es muy sencillo, basta multiplicar sus numeradores y éste será el numerador del resultado, para el denominador se realiza el mismo procedimiento.

Veamos algunos ejemplos:

→ $\frac{3}{2} \cdot \frac{6}{7} = \frac{3 \cdot 6}{2 \cdot 7} = \frac{18}{14}$

→ $\frac{5}{4} \cdot 2 = \frac{5 \cdot 2}{4 \cdot 1} = \frac{10}{4}$

→ $\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4 \cdot 1}{3 \cdot 5} = \frac{4}{15}$

División de Fracciones

Dividir fracciones es un poco más complicado ya que debemos realizar lo que llamamos una multiplicación cruzada, es decir; el numerador del resultado de una división será lo que obtengamos de multiplicar el numerador del dividendo con el denominador del divisor, de la misma forma el denominador del resultado será lo que obtengamos de multiplicar el denominador del dividendo con el numerador del divisor.

Como lo anterior parece ser más complicado de lo que realmente es, también podemos "transformar" la división en una multiplicación y realizar la operación de 'esta forma que ya conocemos, recuerda que dividir no es otra cosa que multiplicar por el inverso multiplicativo del divisor.

Veamos algunos ejemplos:

→ $\frac{5}{4} \div \frac{2}{3} = \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{8}$

→ $\frac{9}{5} \div 4 = \frac{9}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{20}$

→ $\frac{6}{5} \div \frac{1}{3} = \frac{6}{5} \cdot 3 = \frac{18}{5}$

Adición y Sustracción de Fracciones

Antes de continuar vamos a aclarar dos conceptos muy importantes al momento de sumar y restar fracciones, la amplificación y la simplificación.

† **Amplificar**

Significa aumentar el numerador y el denominador de una fracción en la misma proporción. Por ejemplo, amplifiquemos $\frac{2}{3}$ por 5.

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{5} = \frac{10}{15}$$

Éstas dos fracciones son llamadas equivalentes, es dcir, representan la misma cantidad.

† **Simplificar**

Análogamente simplificar significa disminuir el numerador y el denominador de una fracción (si es que se puede), en una misma proporción. Por ejemplo, simplifiquemos $\frac{150}{90}$:

$$\frac{150}{90} = \frac{15}{9} \cdot \frac{10}{10} = \frac{15}{9} \cdot 1 = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{3} = \frac{5}{3} \cdot 1 = \frac{5}{3}$$

En el proceso anterior primero simplificamos por 10 y luego por 3, obteniendo una fracción irreducible (que no se puede simplificar).

Antes de realizar cualquier operación con fracciones es recomendable simplificar lo más que se pueda.

Ahora, para sumar o restar fracciones tenemos dos casos: cuando tienen igual denominador y cuando no.

Para el primer caso no existe gran problema ya que consiste simplemente en operar solo los numeradores, dejando intacto al denominador. Por ejemplo:

→ $\frac{2}{5} + \frac{7}{5} = \frac{2+7}{5} = \frac{9}{5} = 1\frac{4}{5}$

→ $\frac{6}{7} - \frac{9}{7} = \frac{6-9}{7} = \frac{-3}{7} = -\frac{3}{7}$

En cambio para el segundo caso donde tenemos distintos denominadores debemos amplificar cada una de las fracciones en juego de forma tal que obtengamos el mismo denominador en ambas, el cual no será al azar, más bien será el mínimo común múltiplo entre los denominadores de las fracciones. Por ejemplo:

→ $\frac{5}{4} + \frac{7}{6} = \frac{5}{4} \cdot \frac{3}{3} + \frac{7}{6} \cdot \frac{2}{2} = \frac{15}{12} + \frac{14}{12} = \frac{15+14}{12} = \frac{29}{12}$

En el ejemplo anterior primero encontramos el M.C.M entre 6 y 4, que es 12, luego buscamos los números por los que debíamos amplificar cada fracción para obtener este denominador en ambas encontrando el 3 para la primera y el 2 para la segunda. Posteriormente obtuvimos una suma entre fracciones de igual denominador que ya sabemos operar.

Otro ejemplo:

$\rightarrow \frac{9}{5} - \frac{3}{4} = \frac{9}{5} \cdot \frac{4}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{5} = \frac{36}{20} - \frac{15}{20} = \frac{36-15}{20} = \frac{21}{20}$

♣ **Actividad 1.2.**

Suma o resta según corresponda las siguientes fracciones:

1. $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} =$
2. $\frac{5}{4} - \frac{1}{4} =$
3. $\frac{7}{2} + \frac{4}{3} =$
4. $\frac{9}{4} + \frac{-2}{6} =$
5. $\frac{1}{4} - \frac{5}{4} + \frac{2}{4} =$
6. $\frac{6}{5} - \frac{1}{3} + \frac{4}{3} =$
7. $\frac{3}{2} + \frac{7}{9} + \frac{-8}{4} =$
8. $\frac{6}{11} + \frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}} =$
9. $\frac{41}{36} + \frac{31}{72} + 1 =$
10. $\frac{60}{6} + \frac{6}{48} - \frac{15}{20} + \frac{12}{36} - \frac{24}{18} =$
11. $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} - \frac{m \cdot n}{n} =$
12. $\frac{1}{1+\frac{1}{2}} + \frac{2}{2+\frac{2}{3}} + \frac{3}{3+\frac{3}{4}} =$

1.3.7. Potenciación y Radicación

Potencias

Esencialmente una potencia nos representa una multiplicación por sigo mismo de un número que llamamos "base", tantas veces como lo indique otro número que llamamos "exponente".

Exponente

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \ \ldots\ldots \cdot a}_{n-veces}$$

Base

- Propiedades

  Consideremos $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $m, n \in \mathbb{Z}$

  - $a^0 = 1$
  - $a^1 = a$
  - $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
  - $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
  - $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
  - $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}$
  - $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
  - $(a^n)^m = a^{n \cdot m} = a^{m \cdot n} = (a^m)^n$

♣ **Actividad 1.3.**

Utilizando las propiedades de las potencias, realiza los siguientes ejercicios:

1. $\left(\frac{1}{4}\right)^2$
2. $\left(\frac{2}{3}\right)^2$
3. $\left(\frac{6}{5}\right)^{-2}$
4. $\left(\frac{10}{5}\right)^{-(-2)}$
5. $\left(\frac{2}{10}\right)^3$
6. $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5}\right)^{-3}$
7. $(2 \cdot 6)^2$
8. $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} \cdot \left(\frac{6}{5} \cdot 4\right)^2$
9. $\left(\frac{6 \cdot 3}{5}\right)^4$
10. $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}\right)^3$
11. $\left(1\frac{2}{5}\right)^4$
12. $\left(4\frac{2}{3}\right)^3$
13. $\left(3\frac{1}{3}\right)^6$
14. $\left(1\frac{1}{2}\right)^8$
15. $\left(2\frac{1}{4}\right)^4$
16. $\left(\frac{1}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{3}{4}\right)^3$
17. $\left(\frac{2}{5} \cdot 10^2\right)^3$
18. $\left(\frac{5}{6} \cdot 1\frac{1}{5} \cdot 0{,}01\right)^5$
19. $\left(0{,}02 \cdot 0{,}1^2 \cdot \frac{3}{2^3}\right)^4$
20. $\left(\left(\frac{8}{3}\right)^3\right)^2$

Raices

Las raices son casos más generales de las potencias, ya que corresponden a una potencia, pero de índice racional.

Decimos que una raíz n-ésima de un número a es b, si y solo si la n-ésima potencia de b es a,es decir:

Índice de la raiz

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Cantidad Sub – radical

- Propiedades

  Consideremos $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $m, n \in \mathbb{Z}$

  - $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$, con ésta propiedad podemos generalizar las mismas propiedades de las potencias a las raices.
  - $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
  - $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
  - $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$
  - $a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$

♣ *Actividad 1.4.*

Utilizando las propiedades de las raices, realiza los siguientes ejercicios:

1. $\sqrt{4 \cdot 16}$
2. $\sqrt{9 \cdot 16 \cdot 25}$
3. $\sqrt[3]{8 \cdot 64}$
4. $\sqrt[3]{\frac{27}{125}}$
5. $\sqrt[3]{\frac{-1}{8} \cdot \frac{27}{1}}$
6. $\sqrt[9]{-\left(\frac{56}{\pi^4}\right)^0}$
7. $\sqrt[8]{\left(\frac{64}{9}\right)^4}$
8. $\left(\frac{81}{36} \cdot 25\right)^{\frac{2}{4}}$
9. $\sqrt[3]{-27 \cdot 729}$
10. $\sqrt[5]{-32 \cdot 243 \div 1024}$
11. $\sqrt[3]{8 \cdot 27 \cdot 216}$
12. $\sqrt{2^8 \cdot 3^6}$
13. $\sqrt[3]{2 \cdot 3^2}$
14. $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{3^2}$
15. $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$

1.3.8. Notación Científica

La notación científica es una herramienta que ocupamos para poder escribir números demasiado pequeños o demasiado grandes con el fin de reducir espacio en su escritura.

Por ejemplo, 5.000.000.000.000.000.000.000, es un número bastante grande, por lo que aprenderemos que podemos escribir éste número como 5×10^{21}, cuya notación es claramente más eficiente.

Potencias de 10

Son aquellas potencias que tienen base igual a 10, y exponente entero. Son potencias de la forma:

$$10^n \ \forall\, n \ \in \ \mathbb{Z}$$

Estas potencias cuando el exponente es positivo, nos indica la cantidad de ceros que vamos a poner a la derecha del número 1. De la misma forma para los enteros negativos nos indicará la cantidad de ceros que vamos a poner a la izquierda del 1. Es decir:

$$\begin{array}{llcll}
10^0 & = 1 & \qquad & 10^{-1} & = 0,1 \\
10^1 & = 10 & & 10^{-2} & = 0,01 \\
10^2 & = 100 & & 10^{-3} & = 0,001 \\
10^3 & = 1000 & & 10^{-4} & = 0,0001 \\
10^4 & = 10000 & & 10^{-5} & = 0,00001 \\
\vdots & & & \vdots &
\end{array}$$

De esta forma podemos expresar las unidades, decenas, centenas, milésimas, decenas de milésimas, etc .... Reemplazando por éstas potencias de 10 se tiene por ejemplo:

$\rightarrow$ $5000 = 5 \text{ unidades de mil} = 5 \cdot \underbrace{1000}_{3 \text{ ceros}} = 5 \cdot 10^3$

$\rightarrow$ $20000 = 2 \text{ decenas de mil} = 2 \cdot \underbrace{10000}_{4 \text{ ceros}} = 2 \cdot 10^4$

$\rightarrow$ $300000000 = 3 \text{ centésimas de millonésima} = 3 \cdot \underbrace{100000000}_{8 \text{ ceros}} = 3 \cdot 10^8$

Así podemos ver que este tipo de escritura nos puede ser de mucha utilidad cuando deseemos expresar números excesivamente grandes. Pero también utilizando exponentes negativos podemos obtener el mismo resultado, esta vez con números pequeños. Por ejemplo:

$\rightarrow$ $0{,}0000000005 = 5 \cdot \underbrace{0{,}0000000001}_{10 \text{ ceros}} = 5 \cdot 10^{-10}$

Descomposición de números con potencias de 10

También podemos ocupar a las potencias de diez para descomponer números, ya que como cuando lo hacíamos en enseñanza básica, los números los podemos separar en una suma de unidades, decenas, centenas, etc..., y las potencias de base diez son precisamente eso. Por ejemplo:

$$\begin{aligned}
4580403 &= 4000000 + 500000 + 80000 + 400 + 3 \\
&= 4 \cdot 1000000 + 5 \cdot 100000 + 8 \cdot 10000 + 4 \cdot 100 + 3 \cdot 1 \\
&= 4 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5 + 8 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
256{,}4 &= 200 + 50 + 6 + 0{,}4 \\
&= 2 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 1 + 4 \cdot 0{,}1 \\
&= 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1}
\end{aligned}$$

Ahora; llamamos específicamente notación científica cuando escribimos cualquier número representado por un número, con un solo dígito antes de la coma, multiplicado por una potencia de diez. Este dígito es el primero del valor original, por ejemplo:

Escribamos el número 65.300.000 con notación científica, entonces tenemos que escribir un número de un solo dígito antes de la coma que multiplicado por alguna potencia de diez resulte 65.300.000. Dicha potencia de diez resulta tener el exponente igual a la cantidad de espacios que vamos a correr la coma.

Entonces:

$\rightarrow 6\underbrace{5.300.000}_{\text{7 espacios}} = 6{,}53 \times 10^{7}$

Otros ejemplos:

$\rightarrow 4\underbrace{.568.000}_{\text{6 espacios}} = 4{,}568 \times 10^{6}$

$\rightarrow 1\underbrace{2.050.000}_{\text{7 espacios}} = 1{,}205 \times 10^{7}$

$\rightarrow 0,\underbrace{0003}_{\text{4 espacios}}2 = 3{,}2 \times 10^{-4}$

$\rightarrow 0,\underbrace{000000000000006}_{\text{15 espacios}}1 = 6{,}1 \times 10^{-15}$

♣ *Actividad 1.5.*

I. Escribe los siguientes valores con notación científica:

1.	0,00001 =	*6.*	0,00000639 =
2.	0,0000000000235 =	*7.*	0,000000001001 =
3.	125.230=	*8.*	123.200.000=
4.	1.235.300=	*9.*	998.000.000.000.000.000.000=
5.	85.325.000.000=	*10.*	0,0000000000000000009 =

II. Escribe los siguientes números como decimales sin notación científica:

1.	$1,2 \times 10^{2} =$	*5.*	$6,022 \times 10^{23} =$
2.	$3,456 \times 10^{6} =$	*6.*	$1,62\times^{-32} =$
3.	$1,56 \times 10^{-3} =$	*7.*	$2,99 \times 10^{8} =$
4.	$9,99 \times 10^{9}$	*8.*	$5,99 \times 10^{-28} =$

1.4. Mini Ensayo I Números

1. $3 + 2 \cdot 4 - (-1)^2 =$

   a) 21

   b) 19

   c) 12

d) 10
e) Otro valor

2. Un número entero p se compone de dos dígitos que son de izquierda a derecha a y b respectivamente, entonces el inverso aditivo de p es:

   a) $10a + b$
   b) $-10a + b$
   c) $10b + a$
   d) $-10a - b$
   e) $-10b - a$

3. Si a es un número natural y b un número cardinal, entonces puede darse que:

   a) $a + b = 0$
   b) $a \div b = 0$
   c) $b \div a = 0$
   d) $a + b^2 = b$
   e) $b^a + 1 = 0$

4. Si m y n son números naturales impares, entonces es (son) siempre un número par:

   I. $m + n$
   II. $m - n$
   III. $m \cdot n$
   IV. $m + 1$

   a) Solo I
   b) Solo II y IV
   c) Solo I y IV
   d) Solo III y IV
   e) I, II y IV

5. Si se divide el mínimo común múltiplo por el máximo común divisor entre los números 30, 54, 18 y 12; se obtiene:

   a) 5
   b) 15
   c) 30
   d) 45
   e) 90

6. Si a, b y c son respectivamente los tres primeros números primos, entonces $a + b + c =$

   a) 6

b) 10

c) 15

d) 17

e) 30

7. ¿Cuántos elementos en común tiene el conjunto de los divisores de 18 y 16?

   a) Ninguno

   b) 1

   c) 2

   d) 3

   e) 4

8. Si se duplica la expresión 2^4 se obtiene:

   a) 2^5

   b) 2^8

   c) 4^2

   d) 4^5

   e) 4^6

9. Si n es un número tal que $n \in \mathbb{Z}$, entonces ¿cuál(es) de las siguientes expresiones representa(n) tres números pares consecutivos?

   I. $2n$, $2n+1$, $2n+2$

   II. $4n$, $4n+2$, $4n+4$

   III. $2n-4$, $2n-2$, $2n$

   a) Solo III

   b) I y II

   c) I y III

   d) II y III

   e) Todas

10. Sea el conjunto A ={1,2,5,8,9,11}, entonces la cantidad de elementos que existen entre la intersección de A con el conjunto de los números primos es:

    a) 2

    b) 3

    c) 4

    d) 5

    e) 6

11. Se define $(a,b)*(c,d) = (ad+bc, ab-cd)$, entonces $(2,1)*(3,2) =$

a) (3,1)
b) (7,5)
c) (8,4)
d) (8,−4)
e) (7,−4)

12. El séxtuplo del número par consecutivo de 8 es:

a) 16
b) 36
c) 48
d) 60
e) 80

13. Si $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{N}$, entonces el conjunto mas pequeño al que pertenece siempre $\frac{a}{b}$ es:

a) $\mathbb{R}$
b) $\mathbb{I}$
c) $\mathbb{Z}$
d) $\mathbb{Q}$
e) $\mathbb{N}$

14. $\sqrt[3]{-8} + 2 \cdot 14^0 =$

a) 4
b) 3
c) 2
d) 1
e) 0

15. 5.432 es equivalente con:

a) $5 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^2 + 2$
b) $5 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1$
c) $5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10$
d) $5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^2 + 2$
e) $5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$

16. ¿Cuál de las siguientes expresiones NO es racional?

a) 3/0
b) 2/6
c) 0,3
d) $\frac{5}{3}$

e) $\frac{-1}{-(-5)}$

17. Al amplificar por 2 el racional $\frac{3}{4}$ resulta:

 a) $\frac{6}{8}$
 b) 3/8
 c) $\frac{6}{4}$
 d) 3,2
 e) $\frac{3}{2}$

18. Que número dividido por $\frac{5}{p}$ da como resultado $\frac{p}{5}$.

 a) $\frac{p^2}{5}$
 b) $\frac{p}{5}$
 c) $\frac{5}{p}$
 d) $\left(\frac{p}{5}\right)^2$
 e) 1

19. Al ordenar los números 8, 1/6, 4, 3/4, 5, 1/2, 7, 1/9 en forma decreciente, el quinto término es:

 a) 1/9
 b) 5
 c) 1/2
 d) 4
 e) 3/4

20. Si $a = 1/2$ y $b = 1/3$, entonces $\frac{1}{a+b} =$

 a) 1/2
 b) 6/5
 c) 1/6
 d) 6
 e) 5

21. $1^1 + 2^2 + 3^3 =$

 a) 2^5
 b) 2^6
 c) 3^5
 d) 3^9
 e) 6^6

22. Si a la mitad de la unidad se le resta la unidad se obtiene:

a) 0
b) $-\frac{3}{2}$
c) $-\frac{1}{2}$
d) $\frac{3}{2}$
e) $\frac{1}{2}$

23. ¿Cuántas veces esta contenida la quinta parte de $\frac{13}{26}$ en un entero?

a) 0,1
b) 0,5
c) 2,5
d) 5
e) 10

24. Si $m = 4 \cdot 1/3$, $p = 8 \cdot 1/6$ y $q = 6 \cdot 1/8$, entonces ¿cuál de las siguientes relaciones es verdadera?

a) $m > p$
b) $q > m$
c) $p > m$
d) $q > p$
e) $m > q$

Capítulo 2

Proporcionalidad

En el mundo que nos rodea existe una disposición armoniosa en su estructura, cosas que a simple vista y con un consenso común nos parecen bellas, esto es debido a que la naturaleza en general es ordenada, en ciertos aspectos a causa de proporciones que la rigen. Por ejemplo el muy conocido esquema del cuerpo humano de Leonardo Da Vinci esta basado en una proporción. En el presente capítulo aprenderás los conceptos básicos de las razones y las proporciones, de forma que también puedas aprender, de paso, a deleitarte con la belleza gracias a la armonía implícita en la naturaleza.

Versión 1.0, Julio de 2007

2.1. Razones

La razón es un objeto matemático que utilizamos para comparar dos cantidades cualesquiera para poder establecer una característica que las relacione, en particular ambas cantidades las podemos comparar principalmente de dos formas; a través de su diferencia (razón aritmética), y a través de su cuociente (razón geométrica):

2.1.1. Razón Aritmética

La razón aritmética es una forma de comparar dos cantidades en las cuales consideramos cuanto exede una de la otra, es decir, encontrando su diferencia.

Este tipo de razón la podemos escribir de dos modos; separando ambas cantidades a comparar con un signo menos $(-)$, o con un punto(.). De esta forma la razón aritmética entre un par de números a y b, es: $a-b$ ó $a.b$, y se lee a es a b.

El primer término de una razón aritmética se denomina **antecedente**, mientras que el segundo **consecuente**.

Ejemplo :

♠ Un padre quiere repartir la mesada correspondiente a sus dos hijos, pero al fin del mes uno de ellos se portó mal, por lo cual lo va a castigar dándole \$6.000 menos que a su hermano. Si dispone de \$20.000 a repartir. ¿Cuánto le corresponde a cada uno?.

Respuesta :

Para resolver este y todos los otros problemas de este tipo existe un método bastante sencillo a utilizar. Consiste en dividir el intervalo en dos partes iguales (en este caso \$20.000 : 2 =

$10.000), e incorporar a cada parte la mitad de la diferencia que existe entre el antecedente y el consecuente de la razón, es decir $3.000 para cada lado en este caso, por lo tanto tenemos que:

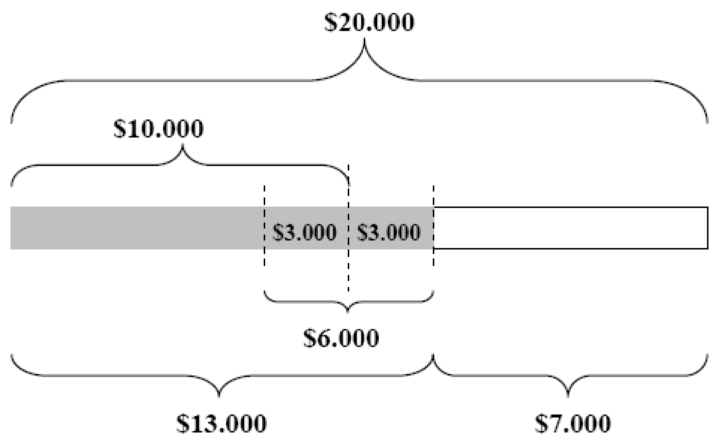


Figura 2.1: División por Razón Aritmética

Luego, resulta ser la cantidad que aparece gris en la figura 2.1 la que le corresponde al hijo que se portó bien, $13.000, y el resto es para el mal hijo, $7.000.

2.1.2. Razón Geométrica

Cada vez que se habla de razón en realidad se quiere hacer referencia a una razón geométrica.

La razón geométrica entre dos cantidades a y b es la comparación por cuociente entre ambas, es decir, la división entre ellas. Este tipo de razón la podemos representar de dos formas; a través de un signo de división ($\div$ o :), o expresada en forma fraccionaria. De ambas formas se lee a es a b.

Al igual que la razón aritmética el primer término se denomina **antecedente** y el segundo **consecuente**.

El tratamiento de las razones geométricas es similar al de las fracciones, es decir, se suman, restan, multiplican, dividen, simplifican y amplifican de la misma forma.

Ahora; ¿a qué nos referimos específicamente cuando decimos 3 es a 5? por ejemplo. Bueno, la respuesta es muy sencilla, quiere decir que cada vez que tengamos 3 partes del antecendente tendremos 5 del consecuente, y en conjunto formamos 8 partes.

Ejemplo :

♠ Al siguiente mes, el mismo padre del ejemplo anterior tiene el mismo problema, uno de sus hijos se ha portado mal, por lo que quiere darle menos mesada que a su hermano, pero esta vez quiere que cada $3 del hermano que se portó bien, el otro reciba solo $2, es decir quiere repartir el dinero a razón de 3 es a 2. Si dispone nuevamente de $20.000, ¿Cuánto dinero le corresponderá a cada uno?.

Respuesta :

Para este tipo de problemas te recomendamos utilizar el siguiente método; el entero que se va a repartir (en este caso $20.000), divídelo en el total de partes más conveniente para repartirse, la cual siempre resulta ser la suma entre el antecedente y el consecuente de la razón geométrica, es decir, en este caso debes dividir $20.000 en 5 partes igules, ya que $3 + 2 = 5$, y luego 3 de esas partes le corresponderán al antecedente (hijo que se portó bien), y las otras 2 al consecuente (hijo que se portó mal).

Observa el siguiente diagrama:

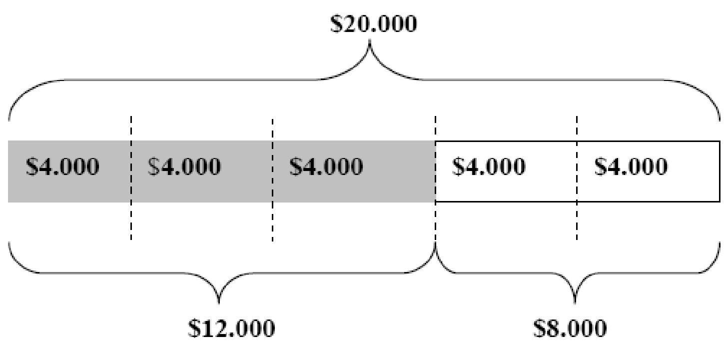


Figura 2.2: División por Razón Geométrica

Donde la parte gris es la que le corresponde al hijo que hizo todas sus obligaciones. Obviamente esta división del dinero que eligió su padre para castigarlo le conviene mas al mal hijo que la anterior. Claro que esto no quiere decir que siempre sea así, haz de ejercicio los mismos dos ejemplos pero que el padre disponga de $40.000 para repartir y te podrás dar cuenta.

Otro ejemplo :

♠ Los ángulos de un triángulo están a razón de $1 : 2 : 3$ (recuerda que esto se lee; uno es a dos es a tres), Sabiendo que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180 grados. ¿Cuánto miden sus ángulos?.

Respuesta :

Sabiendo que la suma de los ángulos interiores del triángulo es 180, debemos dividir 180 grados en 6 partes, ya que entre las partes que le corresponden al primero, al segundo y al tercero suman 6.

$$180 \div 6 = 30$$

Entonces; cada parte resulta ser de 30 grados, por lo tanto los ángulo son:

→ Al primero le corresponde una parte, es decir $1 \cdot 30 = 30$

→ Al segundo le corresponden dos partes, es decir $2 \cdot 30 = 60$

→ Al tercero le corresponden tres partes, es decir $3 \cdot 30 = 90$

2.2. Proporciones

Una proporción es una igualdad entre dos razones equivalentes.[1]

[1]Dos razones aritméticas son equivalentes si la diferencia entre sus antecedentes y consecuentes son respectivamente iguales.

Dos razones geométricas son equivalentes si el cuociente entre sus antecedentes y consecuentes son respectivamente iguales

2.2.1. Proporción Aritmética

Es la igualación de dos razones aritméticas equivalentes. A la diferencia entre las razones involucradas se la llama constante de proporcionalidad aritmética.

Este tipo de proporción no es particularmente importante, es por esto que no le dedicaremos más páginas de estudio.

2.2.2. Proporción Geométrica

Una proporción geométrica (o simplemente proporción), es la igualación de dos razones geométricas equivalentes. En una proporción podemos distinguir sus partes por distintos nombres, están los extremos, que son el antecedente de la primera razón y el consecuente de la segunda, y los medios, que son el consecuente de la primera razón y el antecedente de la segunda.

extremos

$$a : b = c : d$$

medios

Otra forma, además de la equivalencia entre razones, de comprobar si una proporción realmente lo es, es verificar que el producto entre los extremos sea igual al producto entre los medios es decir:

$$a : b = c : d \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Ejemplos :

♠ $3 : 2 = 9 : 6$ es una proporción, pues $3 \cdot 6 = 2 \cdot 9$

♠ $4 : 3 = 5 : 2$ NO es una proporción, pues $4 \cdot 2 \neq 3 \cdot 5$

Con esta última propiedad podemos resolver ejercicios para determinar algunos de los elementos de una proporción. Por ejemplo:

♠ Dada la proporción $7 : 3 = 21 : x$, determinemos el valor de x utilizando la igualación entre el producto de medios y extremos:

$$\begin{aligned} 7 : 3 = 21 : x \Rightarrow 7 \cdot x = 3 \cdot 21 \quad & \Rightarrow \quad 7 \cdot \frac{1}{7} \cdot x = 3 \cdot 21 \cdot \frac{1}{7} \\ & \Rightarrow \quad 1 \cdot x = \frac{3 \cdot 21}{7} \\ & \Rightarrow \quad x = 9 \end{aligned}$$

♣ ***Actividad 2.1.***

Encuentra el término que falta en las siguientes proporciones:

1. $3 : 5 = 4 : x$	*6.* $\frac{144}{56} = \frac{x}{14}$	*11.* $\frac{4}{x} = \frac{x}{36}$
2. $2 : x = 5 : 10$	*7.* $3 : x = x : 12$	*12.* $\frac{12}{3} = \frac{x}{12}$
3. $\frac{5}{9} = \frac{x}{18}$	*8.* $x : 16 = 4 : x$	*13.* $\frac{x}{9} = \frac{1}{x}$
4. $9 : 25 = x : 5$	*9.* $\frac{9}{345} = \frac{3}{x}$	*14.* $\frac{3}{9} = \frac{9}{x}$
5. $\frac{23}{41} = \frac{x}{123}$	*10.* $72 : 9 = 24 : x$	*15.* $x : 8 = 32 : x$

2.2.3. Proporcionalidad Directa

Hasta ahora solo hemos trabajado con este tipo de proporcionalidades, ya que dos magnitudes son directamente proporcionales si multiplicando o dividiendo una de ellas por un número la otra queda multiplicada o dividida por el mismo número, que es precisamente el caso de las proporciones que hemos visto.

También decimos que dos cantidades a y b son directamente proporcionales si su cuociente es constante, es decir:

$$\frac{a}{b} = k, \quad \text{Con } k \text{ constante}$$

Ejemplo :

♠ Si para comprar dos kilogramos de pan necesitas \$1.300, ¿Cuánto dinero necesitas para comprar 5 kilogramos de pan?

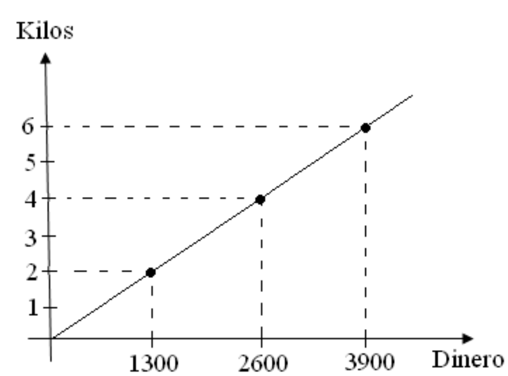
Respuesta :

Nos podemos dar cuenta que el ejemplo es sobre una proporcionalidad directa ya que si aumenta la cantidad de kilogramos de pan, entonces aumenta el dinero. Por lo tanto se debe cumplir que:

$$\begin{aligned}\frac{\text{Dinero}}{\text{Kilos}} = k \quad &\Rightarrow \quad \frac{\$1.300}{2} = \frac{x}{5}\\ &\Rightarrow \quad 2 \cdot x = 5 \cdot \$1.300\\ &\Rightarrow \quad x = \frac{\$6.500}{2} = \$3.250\end{aligned}$$

Y así puedes verificar que para cualquier cantidad de kilos de pan con el dinero que necesites para comprarlo tendrán un cuociente constante. En este caso ese cuociente (k) es igual a 1,300 : 2 = 650.

Una forma de representar dos cantidades que son directamente proporcionales es a través de un gráfico, grafiquemos el mismo ejemplo anterior, es decir, unamos los puntos 2 con 1300, 4 con 2600, 6 con 3900, etc.



Siempre dos cantidades directamente proporcionales al ser graficadas representarán una recta que pasa por el (0,0) u origen.

2.2.4. Proporcionalidad Inversa

Dos cantidades tienen proporcionalidad inversa si al multiplicar una de ellas por un número la otra queda dividida por ese mismo número y viceversa. También decimos que dos magnitudes a y b son inversamente proporcionales si su producto es constante, es decir:

$$a \cdot b = k, \quad \text{Con } k \text{ constante}$$

Ejemplo :

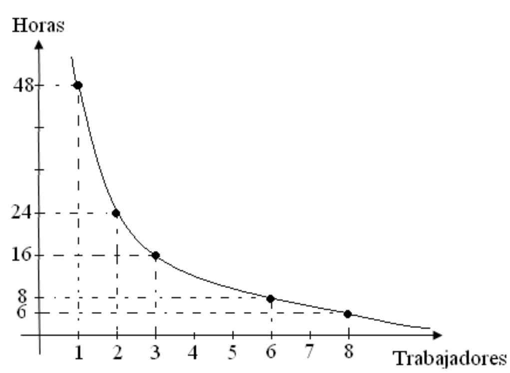
♠ 2 trabajadores se demoran 24 horas en pintar una casa, ¿Cuánto se demorarán 6 trabajadores?

Respuesta :

Nos podemos dar cuenta que el ejemplo es sobre una proporcionalidad inversa debido a que si aumenta una de las magnitudes la otra disminuye (si hay más trabajadores se demoran menos tiempo), por lo tanto se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} \text{Trabajadores} \cdot \text{Horas} = k \quad &\Rightarrow \quad 2 \cdot 24 = 6 \cdot x \\ &\Rightarrow \quad \frac{48}{6} = x \\ &\Rightarrow \quad x = 8 \quad \text{horas.} \end{aligned}$$

Una forma de representar dos cantidades que son inversamente proporcionales es a través de un gráfico, grafiquemos el mismo ejemplo anterior, es decir, unamos los puntos cuyo producto es 48 (pues 48 es la constante k de el ejemplo), entre ellos estan, 1 con 48, 2 con 24, 3 con 16, 8 con 6 y 6 con 8.



2.2.5. Proporcionalidad Compuesta

Hasta ahora solo hemos visto casos con dos variables, sin embargo puede pasar que las variables en juego para una proporción sean mas de dos, lo que provoca que la forma de analizar el problema sea un poco más complicada.

Ejemplo :

♠ Si 10 vacas comen 30 kilos de pasto en 20 días, ¿Cuántos kilos de pasto comerán 15 vacas en 10 días?.

Respuesta :

Como puedes ver las variables en juego son ahora tres, el número de vacas, la cantidad de kilos de pasto y el número de días. Para comenzar es bueno esquematizar el problema como sigue:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Vacas} & & \text{Kilos} & & \text{Días} \\ 10 & \rightarrow & 30 & \rightarrow & 20 \\ 15 & \rightarrow & x & \rightarrow & 10 \end{array}$$

Para resolver este tipo de ejercicios te recomendamos utilizar el siguiente método.

Iguala una de las columnas procurando hacer la corrección sobre las variables de la fila que corregiste, esto quiere decir si por ejemplo queremos igualar el número de días, o aumentamos al doble las vacas, o aumentamos al doble los kilos de pasto, ya que si 15 vacas comen x kilos en 10 días, entonces 15 vacas comerán $2 \cdot x$ kilos en 20 días (el doble de comida en el doble de tiempo), luego la proporción la podemos cambiar por:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Vacas} & & \text{Kilos} & & \text{Días} \\ 10 & \rightarrow & 30 & \rightarrow & 20 \\ 15 & \rightarrow & 2x & \rightarrow & 20 \end{array}$$

Luego, cuando tenemos una columna igualada ese valor pasa a ser un dato más del problema, ya que no existe diferencia entre una situación y la otra. Entonces ahora la pregunta es:

¿Si 10 vacas comen 30 kilos de pasto, ¿Cuántos kilos de pasto comerán 15 vacas?.

$$\begin{array}{ccc} \text{Vacas} & & \text{Kilos} \\ 10 & \rightarrow & 30 \\ 15 & \rightarrow & 2x \end{array}$$

Simplemente eliminamos la columna que coincidía. Y nos queda una proporción de dos magnitudes, que es directamente proporcional (mientras más vacas, más pasto comen), y que ya sabemos resolver.

$$\begin{aligned} 10 \cdot 2x &= 30 \cdot 15 \\ 20x &= 450 \\ x &= \frac{45}{2} \\ x &= 22{,}5 \quad \text{kilos} \end{aligned}$$

Otro ejemplo :

♠ 8 obreros trabajan 18 días para poner 16 metros cuadrados de cerámica, ¿Cuántos metros cuadrados de cerámica pondrán 10 obreros si trabajan 9 días?.

Respuesta :

El esquema del problema es algo como:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Obreros} & & \text{Días} & & \text{Metros cuadrados} \\ 8 & \rightarrow & 18 & \rightarrow & 16 \\ 10 & \rightarrow & 9 & \rightarrow & x \end{array}$$

De la misma forma que en el ejemplo anterior, igualamos una de las columnas. Como la más sencilla resulta ser la columna de los días, entonces nos preguntamos, ¿Cuántos obreros se necesitan para hacer el mismo trabajo en el doble de días?, claramente la respuesta es la mitad, ya que si hay menos obreros, se demoran más días (proporcionalidad inversa), por lo tanto el esquema nos quedará de la forma:

$$\begin{array}{ccc} \text{Obreros} & & \text{Metros cuadrados} \\ 8 & \rightarrow & 16 \\ 5 & \rightarrow & x \end{array}$$

Ahora vemos que nos queda una proporción directa (a más obreros, más metros cuadrados), y resolvemos como ya sabemos:

$$\begin{aligned} 8 \cdot x &= 16 \cdot 5 \\ x &= \frac{80}{8} \\ x &= 10 \quad m^2 \end{aligned}$$

♣ **Actividad 2.2.**

I. *Proporción Directa:*

1. *Si 5 pantalones cuestan \$60.000, ¿cuánto costarán 8 pantalones?.* **(R. \$96.000)**
2. *Si un vehículo se mantiene con velocidad constante de 60 m/s, ¿cuántos metros recorrerá en un minuto?.* **(R. 3.600 m)**
3. *Una persona a cierta hora del día da una sombra de 3 m, si un árbol de 4 m de altura da una sombra de 6 m, ¿cuánto mide la persona?.* **(R. 2 m)**
4. *Si los niños y las niñas de un curso están a razón de 3 : 4 respectivamente, ¿cuántas niñas hay si el curso es de 35 personas?.* **(R. 20 niñas)**

II. *Proporción Inversa:*

1. *Si 2 personas realizan un trabajo en 5 horas, ¿cuánto tiempo demoran 5 personas?.* **(R. 2 horas)**
2. *Si un vehículo a una velocidad de 70 Km/hr se demora 3 horas en llegar de la ciudad A a la ciudad B, ¿a qué velocidad debe desplazarse para demorarse 2 horas entre ambas ciudades?.* **(R. 105 Km/hr)**
3. *Si 5 personas se comen 100 completos en 35 minutos, ¿cuánto demorarán 7 personas en comer la misma cantidad?.* **(R. 25 minutos)**
4. *Un artesano hace 10 tazas de cerámica por hora, ¿cuánto se demorarán 3 artesanos en hacer la misma cantidad de tasas?.* **(R. 20 minutos)**

III. *Proporción Compuesta*

1. *Si tres personas arman un rompecabezas en 24 horas, ¿cuántos rompecabezas armarán 36 personas en 48 horas?.* **(R. 24 rompecabezas)**
2. *5 trabajadores construyen una muralla en 6 horas, ¿cuántos trabajadores se necesitan para contruir 8 murallas en solo un día?.* **(R. 10 trabajadores)**

2.3. Porcentaje

En la vida cotidiana siempre nos encontramos con expresiones como "Liquidatodo, hasta un 70 % de dscto", "Con un interés del 0,01 %", "Mata el 99,9 % de los gérmenes y bacterias", etc. Bueno para que tengas aún más claro el significado de éstas expresiones, veremos el significado matemático del tanto por ciento.

Cuando hablamos de porcentaje, no nos referimos a otra cosa que a una razón, pero una muy especial, es una razón cuyo consecuente es 100, es decir $x\,\% = x/100$, por lo tanto el tratamiento que se haga con un porcentaje es el mismo que con una razón.

Cuando queremos buscar el tanto por ciento de una cantidad solo debemos formar la proporción geométrica y directa entre la cantidad y la incógnita versus el porcentaje. Así se tiene:

♠ El $a\,\%$ de b lo obtenemos resolviendo la siguiente proporción:

$$\frac{?}{b} = \frac{a}{100} \Rightarrow ? = b \cdot \frac{a}{100} = \frac{b \cdot a}{100}$$

Por lo tanto tenemos que siempre el $a\,\%$ de b es:

$$\frac{b \cdot a}{100} = b \cdot a\,\%$$

Veamos algunos ejemplos:

♠ El 30 % de 60 se obtiene de la forma:

$$? = 60 \cdot 30\,\% = 60 \cdot \frac{30}{100} = 6 \cdot 3 = 18$$

Por lo tanto, el 30 % de 60 es 18.

♠ El 15 % de 80 se obtiene de la forma:

$$? = 80 \cdot 15\,\% = 80 \cdot \frac{15}{100} = 8 \cdot 1{,}5 = 12$$

Por lo tanto, el 15 % de 80 es 12.

2.3.1. Porcentaje de una Cantidad

Cuando queremos determinar el porcentaje que una cantidad A es de otra B, debemos considerar una proporción donde el antecedente de la primera razón sea A y el consecuente B, y en la segunda razón el antecedente es la incógnita mientras que el consecuente es 100. Por ejemplo:

♠ Si queremos conocer que porcentaje es 36 de 40. Entonces debemos decir 36 es a 40 como x es a 100, ésto escrito matemáticamente se ve como:

$$\frac{36}{40} = \frac{x}{100} \quad \text{ó} \quad 36 : 40 = x : 100$$

Resolviendo como ya sabemos hacerlo:

$$40 \cdot x = 36 \cdot 100 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3600}{40} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{360}{4} \quad \Rightarrow \quad x = 90 \quad \Rightarrow \quad 36 \text{ es el } 90\,\% \text{ de } 40$$

♣ *Actividad 2.3.*

I. *Ubica el 20 %, el 30 % y el 40 % de:*

1.	*100*	*4.*	*60*	*7.*	*10*	*10.*	*1.000*
2.	*90*	*5.*	*50*	*8.*	*12,5*	*11.*	*956*
3.	*80*	*6.*	*45*	*9.*	*54.800*	*12.*	*831*

II. *Que porcentaje es la primera cantidad de la segunda:*

1.	*30 de 90*	*4.*	*20 de 680*	*7.*	*55 de 330*	*10.*	*35 de 70*
2.	*45 de 360*	*5.*	*68 de 300*	*8.*	*364 de 4*	*11.*	*956 de 478*
3.	*1 de 200*	*6.*	*23 de 89*	*9.*	*96 de 32*	*12.*	*45693 de 458*

2.3.2. Porcentaje de un Porcentaje

Muchas veces habrás escuchado en una liquidación “40 % de descuento, más un 20 % adicional”, ante esta estupenda promoción la mayoría de la gente cree que le están dando un 60 % de descuento en total. Como veremos a continuación este pensamiento esta completamente erróneo ya que cuando se dice “un 20 % adicional” se hace referencia a un descuento sobre la cantidad ya descontada, lo que resulta ser menor al 20 % de la suma original.

Veamos un ejemplo :

♠ Un abrigo cuesta originalmente \$60.000. Si tiene un descuento de un 40 % y luego al pagar con tarjeta de crédito, le descuentan un 20 % adicional. ¿Qué valor debe cancelar una persona que lo compra con tarjeta de crédito?.

Respuesta :

Primero debemos calcular el primer descuento. Es decir:

$$\$60.000 \cdot 40\,\% = \$60.000 \cdot \frac{40}{100} = \$6.000 \cdot 4 = \$24.000 \quad \text{de descuento}$$

Esto quiere decir que el abrigono cuesta $\$60.000 - \$24.000 = \$36.000$. Luego, como pagamos con tarjeta de crédito nos dan de nuevo un descuento de:

$$\$36.000 \cdot 20\,\% = \$36.000 \cdot \frac{20}{100} = \$3.600 \cdot 2 = \$7.200 \quad \text{de descuento adicional}$$

Es decir, el abrigo nos sale por: $\$36.000 - \$7.200 = \$28.800$

Ahora comparemos el precio si es que hubieramos considerado un descuento de $40\,\% + 20\,\% = 60\,\%$.

$$\$60.000 \cdot 60\,\% = \$60.000 \cdot \frac{60}{100} = \$6.000 \cdot 6 = \$3.600 \quad \text{de descuento}$$

Es decir, el abrigo nos saldría por una cantidad de \$60.000 - \$36.000 = \$24.000, que claramente es distinto a la suma anterior de \$28.800 que es lo que sale realmente el abrigo. Por lo tanto, que no te hagan tonto, te descuentas menos de lo que parece.

Más en general, para poder determinar el porcentaje del porcentaje de una cantidad simplemente se vuelve a multiplicar por el siguiente porcentaje. En el caso anterior, como 40 % y

20 % son descuentos (lo que quiere decir que cancelas 60 % con el primer descuento y 80 % con el segundo), entonces el ejercicio se debió efectuar de la forma:

$$\$60.000 \cdot \frac{60}{100} \cdot \frac{80}{100} = \$600 \cdot 6 \cdot 8 = \$3.600 \cdot 8 = \$28.800$$

Otros ejemplos :

♠ El 25 % del 80 % de 200 es:

$$200 \cdot 80\,\% \cdot 25\,\% = 200 \cdot \frac{80}{100} \cdot \frac{25}{100} = 200 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{200}{5} = 40$$

♠ El 60 % del 30 % de 90 es:

$$90 \cdot 30\,\% \cdot 60\,\% = 90 \cdot \frac{30}{100} \cdot \frac{60}{100} = 9 \cdot 3 \cdot \frac{3}{5} = \frac{81}{5} = 16{,}2$$

2.4. Mini Ensayo II Proporcionalidad

1. Una docena de pasteles cuesta $\$6m$, y media docena de queques cuesta $\$12n$, ¿cuál de las expresiones siguientes representa el valor en pesos de media docena de pasteles y dos docenas de queques?

   a) $3(m + 8n)$
   b) $3(m + 16n)$
   c) $6(4m + n)$
   d) $12(m + 4n)$
   e) $24(m + 2n)$

2. En un curso hay 36 alumnos, si 24 son hombres, entonces la razón entre hombres y mujeres respectivamente es:

   a) 1 : 2
   b) 2 : 3
   c) 24 : 12
   d) 36 : 12
   e) 36 : 24

3. En una fiesta hay 12 hombres, si la razón entre mujeres y hombres que hay en la fiesta es 2 : 3, ¿cuántas personas hay en la fiesta?

   a) 8
   b) 16
   c) 18
   d) 20
   e) 24

4. Tres kilos de papas cuestan $\$x$, 6 kilos cuestan $\$(x+30)$, entonces el valor de 3 kilos de papas es:

   a) \$30
   b) \$40
   c) \$50
   d) \$60
   e) \$70

5. La diferencia entre dos números es 48, y están a razón de $5:9$, ¿cuál es el menor de ellos?

   a) 5
   b) 9
   c) 12
   d) 60
   e) 108

6. Si 3 ladrillos pesan $6kg$, ¿cuánto pesarán una decena de ladrillos?

   a) $18kg$
   b) $20kg$
   c) $22kg$
   d) $24kg$
   e) $26kg$

7. 7 obreros cavan en 2 horas una zanja de $10m$, ¿cuántos metros cavarán en el mismo tiempo 42 obreros?

   a) 6
   b) 30
   c) 60
   d) 69
   e) 90

8. Las edades de Gonzalo y Cristian están a razón de $1:3$, si Gonzalo tiene 10 años, ¿cuántos años suman sus edades?

   a) 20
   b) 30
   c) 40
   d) 50
   e) 60

9. En una granja hay patos y gallinas en razón $9:10$, si en una fiesta se sacrifican 19 gallinas la razón se invierte, ¿cuántas gallinas había inicialmente?

a) 10
b) 81
c) 90
d) 100
e) 119

10. La suma de 6 enteros pares consecutivos es 90, ¿en qué razón están los 2 números centrales?

a) 1 : 2
b) 3 : 4
c) 6 : 7
d) 7 : 8
e) 8 : 9

11. Si una repisa con libros pesa 44 kg, y la razón entre el peso de la bandeja y el de los libros es $\frac{1}{10}$, ¿cuánto pesa la repisa?

a) 4 kg
b) 4,4 kg
c) 6 kg
d) 6,6 kg
e) 8 kg

12. Cristian tiene que pagar \$90.000, si le rabajan el 5 % de su deuda, ¿cuánto le queda por cancelar todavía?

a) \$450
b) \$4.550
c) \$85.500
d) \$89.500
e) \$94.550

13. De 125 alumnos de un colegio, el 36 % son damas, ¿Cuántos varones hay?

a) 89
b) 80
c) 45
d) 36
e) 25

14. ¿Qué porcentaje de rebaja se hace sobre una deuda de \$4.500 que se reduca a \$3.600?

a) 80 %
b) 60 %
c) 40 %

d) 20 %
e) 10 %

15. El 35 % de una hora es equivalente en minutos a:

    a) 2
    b) 21
    c) 35
    d) $\frac{1}{35}$
    e) $\frac{7}{12}$

16. Un niño repartió 40 dulces entre sus amigos, a Cristian le dió $\frac{2}{5}$ del total, a Gonzalo el 25 % del resto y a Paola el 50 % de lo que le quedaba, ¿con cuántos dulces se quedó el niño?

    a) 9
    b) 7
    c) 5
    d) 4
    e) 3

17. Un tubo se parte en cuatro partes iguales, ¿a qué porcentaje del tubo equivale cada parte?

    a) 40 %
    b) $33{,}\overline{3}$ %
    c) 25 %
    d) 20 %
    e) 75 %

18. ¿Qué porcentaje es 1/3 de 1/6?

    a) 50 %
    b) 100 %
    c) 150 %
    d) 200 %
    e) 400 %

19. ¿De qué cantidad 80 es el 25 %?

    a) 160
    b) 200
    c) 240
    d) 320
    e) 400

Capítulo 3

Introducción al Álgebra

La palabra álgebra deriva del nombre del libro "Al-jebr – Al-muqābāla" escrito en el año 825 D.C. por el matemático y astrónomo musulman Mohamad ibn Mūsa Al-Khwārizmī. El álgebra es la rama de la matemática que estudia estructuras, relaciones y cantidades de un modo más general que la aritmética, pues utiliza letras o símbolos que pueden tomar cualquier valor para desarrollar distintos tipos de problemas que pueden tener multiples y cambiantes factores que intervengan.

Para trabajar con el álgebra es necesario conocer el denominado Lenguaje Algebraico, mediante el cual escribimos frases y proposiciones del lenguaje común, por medio de símbolos y letras para ya que de ésta manera podemos plantear problemas que se quieren resolver. Para hacer un lenguaje más fluido.

Versión 1.0, Febrero de 2008

3.1. Signos del Álgebra

En la escritura algebraica generalmente se representa a cantidades que nos son conocidas por las primeras letras del alfabeto $(a, b, c, d, e, \ldots)$, y para representar las cantidades que nos son desconocidas utilizaremos las últimas letras del alfabeto $(\ldots v, w, x, y, z)$. Para unir éstas cantidades utilizamos signos de operación, de relación y de agrupación, los cuales son:

- Signos de operación:
  - $a + b$ a más b
  - $a - b$ a menos b
  - $a \cdot b$ a multiplicado por b (o simplemente, a por b)
  - $a : b$ (o $\frac{a}{b}$) a dividido por b
  - a^b a elevado a b
  - $\sqrt[b]{a}$ la raíz b-ésima de a.
- Signos de relación:
  - $=$ igual a
  - $>$ mayor que
  - $<$ menor que.
- Signos de agrupación: paréntesis
  - (), {}, [ ]

3.2. Lenguaje Algebraico

Para poder trabajar con el álgebra es necesario manejar la equivalencia entre el lenguaje común o cotidiano con el lenguaje algebraico. A continuación haremos un paralelo entre los dos lenguajes, para así poder aplicarlo en el planteamiento de problemas.

Lenguaje Algebraico	Lenguaje Cotidiano
$+$	Más, suma, adición, añadir, aumentar
$-$	Menos, diferencia, disminuido, exceso, restar
$\cdot$	De, del, veces, producto, por, factor
$:, \div$	División, cuociente, razón, es a
$=$	Igual, es da, resulta, se obtiene, equivale a
x	Un número cualquiera
$x+1$	Sucesor de un número
$x-1$	Antecesor de un número
$2x$	Doble de un número, duplo, dos veces, número par, múltiplo de dos
$3x$	Triple de un número, triplo, tres veces, múltiplo de 3
$4x$	Cuádruplo de un número
x^2	Cuadrado de un número
x^3	Cubo de un número
$\frac{1}{2}x$ ó $\frac{x}{2}$	Mitad de un número, un medio de
$\frac{1x}{3}$ ó $\frac{x}{3}$	Tercera parte de un número, un tercio de
$\frac{1}{x}$	Inverso multiplicativo
$2x+1$ ó $2x-1$	Número impar
$\frac{x+y}{2}$	Semi suma de dos números
$\frac{x-y}{2}$	Semi diferencia de dos números
$x, x+1, x+2, x+3, \ldots$	Números consecutivos
$2x, 2x+2, 2x+4, 2x+6, \ldots$	Números pares consecutivos
$2x+1, 2x+3, 2x+5, 2x+7, \ldots$	Números impares consecutivos
$4x, 4x+4, 4x+8, 4x+12, \ldots$	Múltiplos consecutivos de 4
$5x, 5x+5, 5x+10, 5x+15, \ldots$	Múltiplos consecutivos de 5
$10x+y$	Número de dos cifras, Número de dos dígitos

♣ *Actividad 3.1.*

Escribir en lenguaje cotidiano las siguientes expresiones algebráicas:

1.	$x-4$	7.	$\frac{2x-3y}{4}$	13.	$\frac{3x^2-(2y)^3}{4}$
2.	$2x+3y$	8.	$\frac{(x+y)^2}{3}$	14.	$(\frac{x}{2})^2-\frac{y^2}{2}$
3.	$5x-y$	9.	$x+\frac{x}{4}$	15.	$\frac{2(x^2+y^3)}{3}$
4.	$\frac{x}{4}+3y$	10.	$(7x)^3$	16.	$x^2(x+1)-1$
5.	$(x-3)^2$	11.	$7(x)^3$	17.	$\frac{3x-2}{3x-4}$
6.	x^2-3	12.	$(2x)^2-4y^3$	18.	$(2x-y)^3$

♣ *Actividad 3.2.*

Escribir en lenguaje cotidiano las siguientes expresiones:

1. *El doble de un número disminuido en el triple de otro número*
2. *Un número aumentado en su mitad*
3. *El exceso de número sobre tres*
4. *El cuádruple del exceso de un número sobre ocho*
5. *El exceso del quíntuplo de un número sobre diez*
6. *El doble del cubo de un número*
7. *El cubo del cuádruple de un número*
8. *La diferencia entre la cuarta parte del cubo de un número y la tercera parte del cuadrado de otro número*
9. *La mitad del exceso del cuadrado del triple de un número sobre el doble del cubo de otro número*
10. *La suma de dos múltiplos consecutivos cualesquiera de ocho*

3.3. Expresiones Algebráicas

Es la representación de una o más operaciones algebráicas.

♠ Ejemplos:

† $(a+b)$

† $\frac{6-2a}{3b}$

† $\frac{a}{b}$

3.3.1. Término

Es una expresión algebráica formada por varios símbolos no separados entre si por $(+)$ ó $(-)$

♠ Ejemplos:

† $7b$

† $\frac{3a}{4x}$

† $15xz$

† a

Los elementos de un término son el signo, el coeficiente, la parte literal y el grado

Ejemplos :

♠ $-3b^2$, es un término negativo, su coeficiente es -3, la parte literal es b^2 y el grado es 2.

◇ *Observa que ...*

El coeficiente puede ser numérico o literal, por lo general se toma el primer elemento y como se acostumbra poner el número antes que la letra, este número es el coeficiente. El grado puede ser absoluto o con respecto a una letra.

♠ $4a^2b^3c^4$, el grado absoluto es 9 ya que es la suma de los exponentes de los factores literales, con respecto a a es 2, a b es 3, a c es 4.

3.3.2. Clasificación de las Expresiones Algebráicas

Monomio : Consta de un solo término.

♠ Ejemplos:

† $4b$

† $-8c$

† $\frac{4ab}{c^2}$

Polinomio : Consta de más de un término.

♠ Ejemplos:

† $4a + 2b$

† $\frac{c-b-\frac{a}{b}+3-y}{5b^3}$

† $\frac{a^2}{5} - \frac{9c}{4d} - 14 + 11y$

Los polimonios más utilizados son:

- Binomios: Consta de 2 términos
- Trinomios: Consta de 3 términos

3.3.3. Términos Semejantes

Dos o más términos son semejantes si tienen la misma parte literal (iguales letras e iguales exponentes).

♠ $12p$, $-3{,}5p$ y $\frac{7p}{2}$, son términos semejantes.

◇ *Observa que ...*

Solo teniendo términos semejantes tu puedes sumar o restar.

3.3.4. Eliminación de Paréntesis

Si al paréntesis lo antecede un signo positivo $(+)$, ponemos este y todos los términos quedan igual, no sucede lo mismo con el signo negativo $(-)$, ya que este invierte todos los signos de los términos del paréntesis.

♣ *Actividad 3.3.*

Resuelve reduciendo términos semejantes.

1. $7a - 9b + 6a - 4b$
2. $-71a^3b - 82a^4b^2 + 50a^3b + 84a^4b^2 + 45a^3b$
3. $a^{m+2} + x^{m+3} - 5 + 8 - 3a^{m+2} + 5x^{m+3} - 6 + a^{m+2} - 5x^{m+3}$
4. $-a + b + 2b - 2c + 3a + 2c - 3b$
5. $\frac{3m^2}{5} - 2mn + \frac{1m^2}{10} - \frac{1mn}{3} + 2mn - 2m^2$
6. $-\{-[-(a+b-c)]\} - \{+[-(c-a+b)]\} + [-\{-a+(-b)\}]$

3.4. Productos Algebraicos

3.4.1. Multiplicación de Monomios

Se multiplican los coeficientes y luego las letras en orden alfabético.

♠ $(3x^2)(4xy^2) = 12x^{2+1}y^2 = 12x^3y^2$

♠ $(-5a^3)(3ab) = -15a^{3+1}b = -15a^4b$

♣ *Actividad 3.4.*

Multiplique los siguientes monomios:

1. $(-5x^3y)(xy^2)$
2. $(-4a^2b)(-ab^2)$
3. $(a^2b^3)(3a^x)$
4. $(-15x^4y^3)(-16a^2x^3)$
5. $(-5a^mb^n)(-6a^2b^3x)$
6. $(x^my^nc)(-x^my^nc^x)$
7. $(-m^xn^a)(-6m^2n)$
8. $(-3a^{n+4}b^{n+1})(-4a^{n+2}b^{n+3})$
9. $(4x^{a+2}b^{a+4})(-5x^{a+5}b^{a+1})$
10. $(\frac{1}{2}a^2)(\frac{4}{5}a^3b)$
11. $(-\frac{3}{5}x^3y^4)(-\frac{5}{6}a^2by^5)$
12. $(-\frac{2}{9}a^xb^{m+1})(-\frac{3}{5}a^{x-1}b^m)$
13. $(a)(-3a)(a^2)$
14. $(-m^2n)(-3m^2)(-mn^3)$
15. $(a^mb^x)(-a^2)(-2ab)(-3a^2x)$
16. $(\frac{2}{3}a^m)(\frac{3}{4}a^2b^4)(-3a^4b^{x+1})$
17. $(-\frac{3}{5}m^3)(-5a^2m)(-\frac{1}{10}a^xm^a)$
18. $(-\frac{1}{2}x^2y)(-\frac{3}{5}xy^2)(-\frac{10}{3}x^3)(-\frac{3}{4}x^2y)$

3.4.2. Multiplicación de Polinomio por Monomio

Multiplicamos el monomio por cada uno de los términos del polinomio.

♠ $(3a^2 - 7a + 4)4ax^2 = (3a^2)(4ax^2) - (7a)(4ax^2) + a(4ax^2) = 12a^3x^2 - 28a^2x^2 + 16ax^2$

◇ *Observa que . . .*

Al multiplicar letras tienes que sumar los exponentes. Siempre tienes que reducir términos semejantes.

♣ *Actividad 3.5.*

Multiplicar:

1. $(8x6^2y - 3y^2)(2ax^3)$
2. $(m^4 - 3m^2n^2 + 7n^4)(-4m^3x)$
3. $(a^3 - 5a62b - 8ab^2)(-4a^4m^2)$
4. $(a^{n+3} - 3an + 2 - 4a^{n+1} - a^n)(-a^nx^2)$
5. $(a^8 - 3a^6b^2 + a^4b^4 - 3a^2b^6)(-5a^3)$
6. $(a^mb^n + 3a^{m-1}b^{n+2} - a^{m-2}b^{n+4} + a^{m-3}b^{n+6})(4a^mb^3)$
7. $(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{5}xy - \frac{1}{4}y^2)(\frac{3}{2}y^3)$
8. $(3a - 5b + 6c)(-\frac{3}{10}a^2x^3)$
9. $(\frac{2}{9}x^4 - x^2y^2 + \frac{1}{3}y^4)(\frac{3}{2}x^3y^4)$
10. $(\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{5}y62)(-\frac{5}{8}a^2m)$
11. $(\frac{2}{3}m^3 + \frac{1}{2}m^2n - \frac{5}{6}mn^2 - \frac{1}{9}n^3)(\frac{3}{4}m^2n^3)$
12. $(\frac{2}{5}x^6 - \frac{1}{3}x^4y^2 + \frac{3}{5}x^2y^4 - \frac{1}{10}y^6)(-\frac{5}{7}a^3x^4y^3)$

3.4.3. Multiplicación de Polinomio por Polinomio

Para multiplicar tomamos el 1^{er} término del 1^{er} polinomio y lo multiplicamos con el 2^{do} polinomio, luego tomamos el 2^{do} término del 1^{er} polinomio y lo multiplicamos con el 2^{do} polinomio, y así continuamos sucesivamente hasta terminar con el polinomio.

♠ $(a+5)(a^2-3) = a(a^2-3) + 5(a^2-3) = a^3 - 3a + 5a^2 - 15 = a^3 + 5a^2 - 15$

♠ $(a+a^2+a^3+\cdots+a^n)(b+b^2+b^3+\cdots+b^n) = a(b+b^2+b^3+\cdots+b^n)+a^2(b+b^2+b^3+\cdots+b^n)+a^3(b+b^2+b^3+\cdots+b^n)+\cdots+a^n(b+b^2+b^3+\cdots+b^n) = ab+ab^2+ab^3+\cdots ab^n+a^2b+a^2b^2+a^2b^3+\cdots+a^2b^n+a^3b+a^3b^2+a^3b^3+\cdots+a^3b^n+\cdots+a^nb+a^nb^2+a^nb^3+\cdots a^nb^n$

♣ *Actividad 3.6.*

Multiplicar:

1. $(a+3)(a-1)$
2. $(6m-5n)(-n+m)$
3. $(x^2+xy+y^2)(x-y)$
4. $(m^3-3m^2n+2mn^2)(m^2-2mn-8n^2)$
5. $(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)(x+y+z)$
6. $(5y^4-3y^3+4y^2+2y)(y^4-3y^2-1)$
7. $(a^x - a^{x+1} + a^{x+2})(a+1)$
8. $(a^{x-1} - b^{n-1})(a-b)$
9. $(a^{2m+1} - 5a^{2m+2}3a^2m)(a^{3m-3} + 6a^{3m-1} - 8a^{3m-2})$
10. $(\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b)(\frac{1}{3}a + \frac{1}{1}b)$
11. $(\frac{2}{5}m^2 + \frac{1}{3}mn - \frac{1}{2}n^2)(\frac{3}{2}m^2 + 2n^2 - mn)$
12. $(\frac{1}{4}a^2 - ab + \frac{2}{3}b^2)(\frac{1}{4}a - \frac{3}{2}b)$

3.5. Mini Ensayo III Expresiones del Álgebra

1. ¿Cuál de las siguientes expresiones representa mejor al quíntuplo del cubo de un número cualquiera?

   a) $(5x)^3$
   b) $5x^3$
   c) 5^3x
   d) $(3x)^5$
   e) $3x^5$

2. La expresión $6(x+1) - x \div 2$ está mejor representada por:

   a) El séxtuplo del sucesor de un número cualquiera menos el doble del mismo número.
   b) El séxtuplo del antecesor de un número cualquiera menos la mitad del mismo número.
   c) El séxtuplo del sucesor de un número cualquiera menos la mitad del mismo número.
   d) La diferencia entre el séxtuplo de un número cualquiera y su mitad.
   e) El exceso de la mitad de un número cualquiera sobre seis veces el mismo número.

3. La expresión $2a + 3b + 4c - (4a + 3b + 2c)$ es equivalente con:

   a) $2(c - a)$
   b) $4(c - a)$
   c) $2(a - c)$
   d) $6(a + b + c)$
   e) $6b$

4. El producto entre un binomio y un monomio da por resultado:

   a) Un monomio.
   b) Un binomio.
   c) Un trinomio.
   d) Un término algebraico.
   e) Una expresión de 3 términos algebraicos.

5. $4x^2y^3z^4(\frac{1}{4}x^{-2}y^2z^{-4} - \frac{1}{2}x^3y^{-3}z^{-4}) =$

   a) $(y - \sqrt[5]{2}x)^5$
   b) $y^5 - \sqrt[5]{2}x^5$
   c) $y^5 - 2x^5$
   d) $y^3 - 2x^4$
   e) $z^5 - 2x^5$

6. ¿Cuántas unidades más tiene x que $2x - y$?

a) $x - y$
b) $y - x$
c) $x + y$
d) $y - 2x$
e) $2x - y$

7. ¿Qué número hay que restar a $3a - 2b$ para obtener $a + b$?

a) $2a - 3b$
b) $2a - b$
c) $4a + 3b$
d) $4a - b$
e) $4a - 3b$

8. El área de un rectángulo viene dada por $a \cdot b$, siendo a su largo y b su alto, ¿qué le sucederá al área del rectángulo si duplicamos su alto y cuadruplicamos su largo?

a) Se duplica.
b) Queda igual.
c) Aumenta 4 veces.
d) Aumenta en 8 unidades.
e) Aumenta 8 veces.

9. ¿Que expresión algebraica representa a la sucesión de números $(\ldots\ 9, 13, 17, 21, \ldots\ )$?

a) $9 + 2n$
b) $4n + 5$
c) $3n + 1$
d) Todas
e) Ninguna

10. La diferencia entre el cuadrado del sucesor de un número cualquiera y el doble de dicho número es:

a) $x^2 + 1$
b) $(x + 1)^2$
c) $x^2 + 1 - 2x$
d) $(x - 1)^2 - 2x$
e) No se puede determinar.

11. ¿Cuál de las siguientes expresiones es FALSA?

a) 1/6 de hora equivale a 10 minutos.
b) 3/4 de un día equivale a 18 horas.
c) 5/6 de un año equivale a 10 meses.

d) 1/8 de kilo equivale a 125 gramos.

e) 1/6 de un ángulo extendido equivale a 36°.

12. Si la mitad de n es igual al triple de m, entonces la mitad de m es:

a) $\frac{n}{12}$

b) $n/6$

c) $\frac{n}{4}$

d) $n/3$

e) $\frac{n}{2}$

13. Al resolver $x - [x - (-x - y) - (-x)]$ se obtiene:

a) $-2x - y$

b) $2x - y$

c) $2x + y$

d) $-2x + y$

e) $4x - y$

14. El valor de $a(a + b) - a(a - b)$ es:

a) $2a + 2ab$

b) ab

c) $a^2 + ab$

d) $2a^2b$

e) $2ab$

15. ¿Qué fracción debe agregarce a 1 para obtener $\frac{9}{5}$

a) 1/5

b) 2/5

c) 3/5

d) 4/5

e) −1/5

16. "Al número n se le suma m, ésta suma se divide por k y el resultado se multiplica por p", se representa por:

a) $(n + m \div k) \cdot p$

b) $(n + m \cdot p) \div k$

c) $n \div k + m \cdot p$

d) $[(n + m) \div k] \cdot p$

e) $n \cdot p + m \div k$

17. La expresión $(2x)^3$ se lee:

a) El doble del cubo de un número.

b) El doble del triple de un número.

c) El cubo del doble de un número.

d) El cubo del cuadrado de un número.

e) El triple del doble de un número.

Capítulo 4

Desarrollo Algebraico

En el presente capítulo aprenderás técnicas para "simplificar" expresiones algebraicas, reduciendo la mayor cantidad de términos de cada expresión para lograr una apariencia mas agradable y breve, esto es lo que conocemos como factorización y reducción de las expresiones algebraicas.

Existen muchos métodos distintos para lograr estos objetivos, pero sin duda que para todos ellos te será de mucha utilidad conocer los llamados Productos Notables, que nos permitirán simplificar enormemente nuestro trabajo.

Versión 1.0, Febrero de 2008

4.1. Productos Notables

Estos son productos que cumplen con ciertas reglas, que nos permiten hacer más fluido nuestros cálculos.

4.1.1. Cuadrado de Binomio

Es el 1^{er} término al cuadrado $(+)$ ó $(-)$ el doble producto del 1^{ero} por el 2^{do} $(+)$ el 2^{do} término al cuadrado.

$$\boxed{(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2}$$

4.1.2. Suma por su Diferencia

Es el 1^{er} término al cuadrado $(-)$ el segundo término la cuadrado.

$$\boxed{(a + b)(a - b) = a^2 - b^2}$$

4.1.3. Cubo de Binomio

Es el 1^{er} término al cubo $(+)$ ó $(-)$ el triple producto del 1^{ero} al cuadrado por el segundo $(+)$ el triple producto del 1^{ero} por el 2^{do} al cuadrado $(+)$ ó $(-)$ el 2^{do} término al cubo.

$$\boxed{(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3}$$

4.1.4. Multiplicación de binomios con un término en común

Es el término en común al cuadrado más (+) la suma de los término distintos por el término en común más (+) el producto entre los términos distintos.

$$\boxed{(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab}$$

♣ *Actividad 4.1.*

Resuelve los siguientes productos notables:

1. $(5+x)^2$
2. $(a^2x+by^2)^2$
3. $(3a^4-5b^2)^2$
4. $(8x^2y+9m^3)^2$
5. $(x^5-3ay^2)^2$
6. $(x^{a+1}+y^{x-2})^2$
7. $(a^{x-2}-5)^2$
8. $(x^{a+1}-3x^{a-2})^2$
9. $(1-3ax)(3ax+1)$
10. $(6x^2-m^2x)(6x^2+m^2x)$
11. $(3x^a-5y^m)(5y^m+3x^a)$
12. $(x^2+a^2)(x^2-a^2)$
13. $(a^{x+1}-2b^{x-1})(2b^{x-1}+a^{x+1})$
14. $(2x+1)^3$
15. $(1-3y)^3$
16. $(a^2-2b)^3$
17. $(4n+3)^3$
18. $(2x+3y)^3$
19. $(1-a^2)^3$
20. $(2x-3y^3)^3$

4.1.5. Binomio a una Potencia Natural

Corresponde a la manera de generalizar el cuadrado de binomio, el cubo de binomio, binomio a la cuarta, etc. A un binomio a la n, donde n es un número natural.

$$\boxed{(x\pm y)^n = a_0x^n \pm a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 \pm a_3x^{n-3}y^3 + \cdots a_ny^n}$$

En la fórmula anterior existe una relación interesante de conocer en cada uno de sus términos, notemos que en el primer término aparece x^n, en el segundo x^{n-1} en el tercero x^{x-2}, ... en el $m-$ésimo $x^{n-(m-1)}$, es decir x va disminuyendo su potencia partiendo desde n hasta llegar a 0 en el último término[1], en el caso de y ocurre absolutamente lo contrario, la potencia parte de 0 en el primer término hasta llegar a n en el último. De ésta manera obtendremos fácilmente los coeficientes literales de ésta expresión, sin embargo los coeficientes $\{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ vienen determinados por una estructura conocida como el *Triángulo de Pascal*, que vemos a continuación:

Triángulo de Pascal

$$\begin{array}{ll ccccccccccccc}
n=0 & \rightarrow & & & & & & & 1 & & & & & & \\
n=1 & \rightarrow & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
n=2 & \rightarrow & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
n=3 & \rightarrow & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
n=4 & \rightarrow & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
n=5 & \rightarrow & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
n=6 & \rightarrow & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 & & & & & & & & \vdots & & & & & &
\end{array}$$

La manera de obtener éste triángulo es partir de las dos primeras filas, y de ahí en adelante sumar hacia abajo los coeficientes para obtener la fila que continúa. Observa que en la tercera

[1]Observa que la cantidad de términos que resultan de la expresión $(a+b)^n$ es $n+1$.

y la cuarta fila aparecen los coeficientes del cuadrado y del cubo de binomio respectivamente, cuando $n = 2$ y $n = 3$.

De ésta manera podemos obtener (conociendo la fila que corresponde en el triángulo de Pascal), cualquier potencia de un binomio.

♠ Ejemplo 1:

Encontremos la expresión expandida de $(a + b)^5$.

Respuesta; los coeficientes que le corresponden son los de la sexta fila del triángulo de Pascal, pues $n = 5$, entonces el primer paso es:

$$(a+b)^5 = 1\_\_\_ + 5\_\_\_ + 10\_\_\_ + 10\_\_\_ + 5\_\_\_ + 1\_\_\_$$

Ahora ponemos los término a y b con las potencias respectivas.

$$\begin{aligned}(a+b)^5 &= 1 \cdot a^5 \cdot b^0 + 5 \cdot a^4 \cdot b^1 + 10 \cdot a^3 \cdot b^2 + 10 \cdot a^2 \cdot b^3 + 5 \cdot a^1 \cdot b^4 + 1 \cdot a^0 \cdot b^5 \\ &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5\end{aligned}$$

♠ Ejemplo 2:

Encontremos la expresión expandida de $(2x - 3)^4$

Respuesta: los coeficientes que le corresponden son los de la quinta fila del triángulo de Pascal, pues $n = 4$, entonces el primer paso es:

$$(2x-3)^4 = 1\_\_\_ - 4\_\_\_ + 6\_\_\_ - 4\_\_\_ + 1\_\_\_$$

Ahora ponemos los término $2x$ y 3 con las potencias respectivas.

$$\begin{aligned}(2x-3)^4 &= 1 \cdot (2x)^4 \cdot 3^0 - 4 \cdot (2x)^3 \cdot 3^1 + 6 \cdot (2x)^2 \cdot 3^2 - 4 \cdot (2x)^1 \cdot 3^3 + 1 \cdot (2x)^0 \cdot 3^4 \\ &= 64x^4 - 96x^3 + 216x^2 - 216x + 81\end{aligned}$$

4.2. Factorización

Al factorizar buscamos dos o más factores cuyo producto sea igual a la expresión que queremos obtener.

No todos los polinomios se pueden factorizar, ya que hay algunos que solo son divisibles por si mismo y por 1, como por ejemplo: $x + y$. Pero hay que tener ojo ya que este polinomio no es divisible en los reales $\mathbb{R}$ (que es donde estamos trabajando), esto no significa que no se pueda factorizar en otro conjunto numérico mayor, por ejemplo $x + y$ si se puede factorizar en los complejos $\mathbb{C}$, quedando: $(\sqrt{x} + \sqrt{y}i)(\sqrt{x} - \sqrt{y}i)$.

Por ahora solo trabajaremos en los reales $\mathbb{R}$.

4.2.1. Factor Común

Factor Común de un Monomio

♠ Ejemplos:

- $5x + 25x^2y = 5x(1 + 5xy)$
- $18mxy^2 - 54m^2x^2y^2 + 36my^2 = 18my^2(x - 3mx^2 + 2)$

Factor Común de un Polinomio

♠ Ejemplos:

- $x(a+b)+m(a+b)=(x+m)(a+b)$
- $2x(a-1)-y(a-1)=(2x-y)(a-1)$
- $a(x+1)-x-1=a(x+1)-(x+1)=(a-1)(x+1)$

Factor Común por Agrupación de Términos

♠ Ejemplos:

- $ax+bx+ay+by=(ax+bx)+(ay+by)=x(a+b)+y(a+b)=(x+y)(a+b)$
- $2x^2-3xy-4x+6y=(2x^2-3xy)-(4x-6y)=x(2x-3y)-2(2x-3y)=(x-2)(2x-3y)$

4.2.2. Factorización de Trinomios

Trinomio Cuadrado Perfecto

Para factorizar un trinomio cuadrado perfecto, primero tenemos que ordenar el trinomio dejando a los extremos los cuadrados perfectos.

Por ejemplo:

$$2m+m^2+1 \quad = \quad m^2+2m+1$$

Luego extraemos la raíz cuadrada a los cuadrados perfectos.
de m^2 es m y de 1 es 1 obteniendo:

$$(m+1)(m+1) \quad = \quad (m+1)^2$$

Trinomio de la forma x^2+bx+c

Tomemos el trinomio $x^2-7x+12$ el cual ya está ordenado, entonces escribiremos:

$$x^2-7x+12 \quad = \quad (x \qquad)(x \qquad)$$

Luego nos preguntamos que números sumados me dan -7 y a la vez multiplicados me den 12, estos números son -3 y -4, estos los colocamos en los paréntesis.

$$x^2-7x+12 \quad = \quad (x-3)(x-4)$$

Trinomio de la forma ax^2+bx+c

Tomemos el trinomio $6x^2-7x-3$, ya ordenado amplificaremos por el coeficiente que acompaña a x^2, que en este caso es 6 quedando:

$$(6x^2-7x-3)\cdot 6 \quad = \quad (6x)^2-7(6x)-18$$

Ahora buscamos dos números que multiplicados den -18 y sumados -7, estos son -9 y 2. Como anteriormente amplificamos la expresión por 6 ahora hay que dividir por 6.

$$
\begin{aligned}
6x^2 - 7x - 3 &= \frac{(6x)^2 - 7(6x) - 18}{6} \\
&= \frac{36x^2 - 7(6x) - 18}{6} \\
&= \frac{(6x\qquad)(6x\qquad)}{6} \\
&= \frac{(6x-9)(6x+2)}{6} \\
&= \frac{3(2x-3)2(3x+1)}{6} \\
&= \frac{6(2x-3)(3x+1)}{6} \\
&= (2x-3)(3x+1)
\end{aligned}
$$

4.2.3. Factorización de Cubos

Cubo perfecto de Binomio

Tenemos que ordenar la expresión con respecto a una letra. Y debe cumplir con las siguientes condiciones:

1. Debe tener cuatro términos
2. El 1^{ero} y el último término deben ser cubos perfectos
3. El 2^{do} sea más o menos el triple del 1^{ero} al cuadrado por el 2^{do}.
4. Y que el 3^{er} término sea el triple del 1^{ero} por el 2^{do} al cuadrado.

Tomemos $-27 + 27x - 9x^2 + x^3$ ordenado queda: $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$ Tiene cuatro términos, la raíz cúbica de x^3 es x y la de -27 es -3, además $3 \cdot x^2 \cdot -3$ es el 2^{do} término y $3 \cdot x \cdot (x)^2$ el 3^{ero}.

Suma o Diferencia de Cubos Perfectos

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

4.2.4. Diferencia de Cuadrados Perfectos

Tenemos que extraer la raíz cuadrada a los dos términos y luego multiplicamos la diferencia de las raíces con la suma de estas.

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Ya que la raíz de a^2 es a y la de b^2 es b.

4.2.5. Completación de Cuadrados de Binomio

Tomemos $y^2 - 8y + 15$.

Digamos que y^2 y $-8y$ son parte de un cuadrado perfecto.

Luego nos faltaría el último término que es el cuadrado de la mitad del coeficiente que acompaña a x, que es 16.

Sumemos y restemos este último término.

Arreglando los términos convenientemente llegamos a la diferencia de dos cuadrados perfecto.

Y aplicamos desde luego suma por su diferencia.

$$\begin{aligned}
y^2 - 8y + 15 &= y^2 - 8y + 15 - 16 + 16 \\
&= (y^2 - 8y + 16) + (15 - 16) \\
&= (y-4)^2 - 1 \\
&= (y-4-1)(y-4+1) \\
&= (y-5)(y-3)
\end{aligned}$$

De manera más general:

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx &= 0 \\
\Rightarrow x^2 + \frac{b}{a}x &= 0 \\
x^2 + \frac{b}{a}x + 0 &= 0 \\
\underbrace{x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}}_{\text{Un cuadrado perfecto}} - \frac{b^2}{4a^2} &= 0 \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2}{4a^2}
\end{aligned}$$

◇ **Observa que...**

Para comprobar si la factorización que hicimos esta correcta tenemos que aplicar el axioma de distributividad. véase página 9

♣ *Actividad 4.2.*

Factoriza utilizando cualesquier método, si se puede simplifica:

1. $ax + bx - ay - by$
2. $2a^2x + 2ax^2 - 3ax$
3. $4x(m - n) + n - m$
4. $(x + y)(n + 1) - 3(n + 1)$
5. $x(a + 2) - a - 2 + 3(a + 2)$
6. $6m - 9n + 21nx - 14mx$
7. $n^2x - 5a^2y^2 - n^2y^2 + 5a^2x$
8. $a^3 + a^2 + a + 1$
9. $20ax - 5bx - 2by + 8ay$
10. $36 + 12m^2 + m^4$
11. $\frac{a^2}{4} - ab + b^2$
12. $16x^6 - 2x^3y^2 + \frac{y^4}{16}$
13. $196x^2y^4 - 289b^4m^10$
14. $\frac{x^6}{49} - \frac{4a^10}{121}$
15. $a^{2n} - b^{2n}$
16. $64m^2 - (m - 2n)^2$
17. $-4y^2 + 9x^4$
18. $25 - x^2 - 16y^2 + 8xy$
19. $1 - 2a - 9n^2 + 6an$
20. $28 + a^2 - 11a$
21. $x^2 - 7x - 30$
22. $m^2 - 20m - 300$
23. $x^4 + 7ax^2 - 60a^2$
24. $8a^2 - 14a - 15$
25. $m - 6 + 15m^2$
26. $20x^2y^2 + 9xy - 20$
27. $125a^3 + 150a^2b + 60ab^2 + 8b^3$
28. $27a^3 - b^3$
29. $x^2 - 12x + 11$
30. $y^2 + 16y + 20$

4.3. Mini Ensayo IV Factorización

1. Al simplificar la expresión

$$(x^{2k} - y^{2k}) \div \frac{x^{k+1} - xy^k}{y^{k+1} + x^k y}$$

Resulta:

a) $\frac{y^2(x^k+y^k)}{x}$

b) $\frac{(x^k+y^k)^2}{xy^2}$

c) $\frac{x}{y}(x^k + y^k)^2$

d) $\frac{xy}{(x^k+y^k)}$

e) Ninguna de las anteriores.

2. $a^2 - 4b^2 =$

a) $a + 2b$

b) $a - 2b$

c) $(a - 2b)(a + 2b)$

d) $(2b - a)(2b + a)$

e) Ninguna de las anteriores.

3. ¿Cuál(es) de los siguientes términos se puede(n) agregar a la expresión $4x^2 + 1$ para completar el desarrollo del cuadrado de binomio?

I. $-4x^2$

II. $4x$

III. $4x^2$

a) Solo I

b) Solo II
c) Solo III
d) I y III
e) II y III

4. En la expresión algebraica $(y-5)(y^5-8)(y-3)$ el término libre (sin factor literal), es:

 a) -120
 b) 0
 c) 16
 d) 80
 e) 120

5. El grado de la expresión $5x^3y^4z$ es:

 a) 3
 b) 4
 c) 5
 d) 7
 e) 8

6. El producto entre la suma del cuadrado de a y el cubo de b y su diferencia es:

 a) a^4
 b) $2a^4-2b^6$
 c) a^4-b^9
 d) a^4-b^6
 e) $2a^2-2b^9$

7. Al dividir (x^2-y^2) por $(x+y)(x-y)$ se obtiene:

 a) 0
 b) $\frac{x-y}{x+y}$
 c) $\frac{x+y}{x-y}$
 d) $\frac{1}{x+y}$
 e) 1

8. ¿Cuál es el área de un rectángulo de lados $(m+n)$ y $(m-n)$?

 a) $m^2+2mn+n^2$
 b) m^2+n^2
 c) m^2-n^2
 d) $m^2-2mn+n^2$
 e) nm^2+mn^2

9. La expresión equivalente a $(3m - 5p)^2$ es:

   a) $6m^2 - 10p^2$
   b) $9m^2 - 25p^2$
   c) $6m^2 - 15mp + 25p^2$
   d) $9m^2 - 30mp - 25p^2$
   e) $9m^2 - 30mp + 25p^2$

10. $\frac{a^6b^{-15}}{a^2b^{-5}} =$

   a) $-\frac{9}{7}$
   b) a^8b^{-10}
   c) a^4b^{-20}
   d) $a^{-3}b^3$
   e) -9

11. El cuociente entre $(5^{2n+1} - 25^n)$ y 5^{2n+2} es:

   a) $1/5$
   b) 5
   c) $25/4$
   d) $(2/5)^2$
   e) 5^{1-4n}

12. Si $x^2 + y^2 = 36$ y $xy = 32$ entonces el valor de $(x + y)$ es:

   a) -1
   b) 0
   c) 1
   d) 10
   e) 32

13. Si la cuarta parte del área de un cuadrado es $\frac{1}{4}x^2 + x + 1$, entonces el doble de su perímetro es:

   a) $x + 2$
   b) $(x + 2)^2$
   c) $4x + 8$
   d) $2x + 4$
   e) $8x + 16$

14. El área de un cuadrado de lado $(2 - x)$ es:

   a) $8 - 4x$
   b) $4 - 4x + x^2$
   c) $4 + x^2$
   d) $4 - 2x$
   e) $4 + 4x + x^2$

Capítulo 5

Ecuaciones Algebraicas

Muchos de los problemas que nos acontecen en la vida diaria, basan su solución en el conocimiento de distintos factores que lo involucran, como por ejemplo, es necesario conocer la distancia y el tiempo del que dispongo para llegar a algún lugar para determinar la velocidad a la que necesitaré ir. Por lo tanto se hace muy importante buscar formas de obtener valores que nos son desconocidos, y sin duda, la forma más exacta de encontralas es lograr interpretarlos matemáticamente en algo que denominamos **ecuación**.

En el capítulo anterior aprendiste a interpretar el lenguaje hablado como lenguaje matemático, en éste capítulo aprenderás como aprovechar ese conocimiento para formar ecuaciones y poder resolverlas.

Versión 1.0, Enero de 2008

5.1. Conceptos Básicos

Ecuación : Las ecuaciones son expresiones algebraicas formadas por dos miembros separados de una igualdad (=). Uno o ambos de éstas partes debe tener a lo menos una variable conocida como *incógnita*.

Las ecuaciones se satisfacen sólo para determinados valores de la o las incógnitas, los cuales son conocidos como *soluciones o raices de la ecuación*.

Ecuación Algebraica : Es aquella ecuación en que ambos miembros son polinomios.

Identidad : Las identidades son expresiones similares a las ecuaciones, pero la igualdad entre los miembros que la componen es válida para cualquier valor de la incógnita, por ejemplo $x^2 = x \cdot x$ se cumple para cualquier valor de x, por lo tanto ésta sería una identidad. A diferencia $x + 1 = 2$ es válida sólo si $x = 1$, por lo tanto ésta sería una ecuación.

Solución o Raíz : Es el valor real para el que una ecuación tiene sentido, es decir, es el valor que necesita ser la incógnita para que la ecuación se transforme en una identidad.

5.2. Ecuación de primer grado

Las ecuaciones de primer grado son aquellas en las cuales la o las variables presentes están elevadas a 1 (por esta razón se llaman de primer grado), veamos como podemos resolver éstas ecuaciones.

5.2.1. Resolución de ecuaciones de primer grado

Empecemos viendo algunas reglas que nos servirán para la resolución de ecuaciones:

1^{ero} A toda igualdad se le puede agregar o quitar una cantidad sin alterarla, siempre que se haga sobre ambos lados de dicha igualdad. Por ejemplo; todos sabemos que $2 = 1 + 1$, si agregamos una unidad a cada lado de la igualdad obtenemos $2 + 1 = 1 + 1 + 1$ lo que implica que $3 = 1 + 1 + 1$ que también resulta ser verdadero.

2^{do} Toda igualdad puede ser multiplicada y/o dividida en ambos lados por cualquier número real distinto de 0 manteniendose la igualdad inalterable.

3^{ero} Toda ecuación de primer grado con una variable se puede escribir de la forma $ax + b = 0$, y es de los valores de a y b de los cuales depende la cantidad de soluciones que vamos a tener.

- Si $a \neq 0$, entonces existe una única solución.
- Si $a = 0$ y $b = 0$, existen infinitas soluciones.
- Si $a = 0$ y $b \neq 0$, no existen soluciones.

Ahora, veamos el método básico de resolución con un ejemplo.

Ejemplo :

$5x + 7$	$=$	$21 - 9x$	$\rightarrow$	Ocupando la primera regla podemos sumar a ambos lados el número $9x$.
$5x + 7 + 9x$	$=$	$21 - 9x + 9x$	$\rightarrow$	Como $-9x$ es el inverso aditivo de $9x$ implica que $9x - 9x = 0$.
$5x + 9x + 7$	$=$	$21 + 0$	$\rightarrow$	Ahora podemos sumar -7 a ambos lados.
$14x + 7 - 7$	$=$	$21 - 7$		
$14x + 0$	$=$	14	$\rightarrow$	Luego ocupando la segunda regla podemos dividir a ambos lados por 14 obteniendo.
$14x \div 14$	$=$	$14 \div 14$	$\rightarrow$	Al lado izquierdo podemos conmutar.
$x \cdot 14 \div 14$	$=$	1	$\rightarrow$	Obteniendo finalmente.
$x \cdot 1$	$=$	1		
x	$=$	1		

Como puedes ver la idea de éste método es juntar todos los términos algebraicos que tengan la incógnita a un solo lado de la igualdad para luego "despejarlo" sumando los inversos aditivos de los otros términos, una vez que queda el término con la incógnita solo a un lado de la ecuación multiplicamos por el inverso multiplicativo de su factor numeral. De ésta forma siempre llegaremos a la solución.

5.2.2. Redacción de ecuaciones de primer grado

Muchos de los problemas que te aparecerán en la PSU no están escritos matemáticamente, así es que es muy importante que aprendas como transformarlo a una simple ecuación.

Recuerda cuando aprendiste lenguaje algebraico[1], porque te será muy útil.

[1]Véase página 38

Ejemplo :

♠ ¿Qué número es aquel que al duplicar su sucesor es igual al triple de su antecesor?.

Respuesta :

El doble del sucesor de un número se representa por $2 \cdot (x+1)$, y el triple del antecesor como $3 \cdot (x-1)$, por lo tanto la ecuación que da de la forma:

$$2(x+1) = 3(x-1)$$

Luego lo resolvemos como ya sabemos hacerlo:

$$\begin{aligned}
2(x+1) &= 3(x-1)\\
2x+2 &= 3x-3\\
2+3 &= 3x-2x\\
5 &= x
\end{aligned}$$

Otro ejemplo :

♠ Gonzalo tiene \$900 más que Cristian.Si entre ambos tienen un total de \$5.500, ¿cuánto dinero tiene Cristian?

Respuesta :

El dinero de Cristian es nuestra incógnita, así es que llamémosla $\$x$, por lo tanto Gonzalo debe tener $(\$x + \$900)$ ya que éste tiene \$900 más. Como entre ambos suman \$5.500 la ecuación queda de la forma:

$$\$x + (\$x + \$900) = \$5.500$$

Al resolverla queda:

$$\begin{aligned}
\$x + (\$x + \$900) &= \$5.500\\
\$x + \$x + \$900 &= \$5.500\\
\$2x + \$900 &= \$5.500\\
\$2x &= \$5.500 - \$900\\
\$2x &= \$4.600\\
\$x &= \frac{\$4.600}{2}\\
\$x &= \$2.300
\end{aligned}$$

♣ *Actividad 5.1.*

Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado

1. $x+2=5$
2. $5-x=10$
3. $2x+4=7$
4. $4x+1=2$
5. $5x+6=10x+5$
6. $21-6x=27-8x$
7. $8x-4+3x=8x+14$
8. $5x+20=10x+2$
9. $11+8x=10x-3$
10. $\frac{x+2}{5}=2$
11. $(x+2)-(-x-3)=x$
12. $-(x+1-(2x+5))=x$
13. $-((x+5)+5x+2)=(8x+6)$
14. $\frac{x+5}{8}=\frac{x-9}{5}$
15. $x-(2x+1)=8-(3x+3)$
16. $15x-10=6x-(x+2)+(-x+3)$
17. $(5-x)-(6-4x)=8x-(3x-17)$
18. $30x-(6-x)+(4-5x)=-(5x+6)$
19. $x+3(x-1)=6-4(2x+3)$
20. $6(x-1)+16(2x+3)=3(2x-7)$
21. $\frac{x}{2}+1=2$
22. $(5-3x)-(-4x+6)=5x+17$
23. $x-(5x+1)=-3x+(-x+2)$
24. $14x-(3x+2)-10=10x-1$
25. $5x+-x-(x+5)=1$
26. $\frac{x+2}{4}=\frac{2-x}{8}+1$
27. $\frac{x}{10}=\frac{x}{2}+1$
28. $5x=\frac{8x-15}{3}$
29. $\frac{x+2}{x-6}=-1$
30. $\frac{(x+5)-(-3x+2x)}{5x}=-5+2$
31. $2(3x+3)-4(5x-3)=x(x-3)-x(x+5)$
32. $184-7(2x+5)=301+6(x-1)-6$
33. $7(18-x)=6(3-5x)-(7x+21)-3(2x+5)$
34. $-3(2x+7)+(6-5x)-8(1-2x)=(x-3)$
35. $(3x-4)(4x-3)=(6x-4)(2x-5)$
36. $(4-5x)(4x-5)=(10x-3)(7-2x)$
37. $(x-2)^2-(3-x)^2=1$
38. $14-(5x-1)(2x+3)=17-(10x+1)(x-6)$
39. $7(x-4)^2-3(x+5)^2+2=4(x+1)(x-1)$
40. $(x+1)^3-(x-1)^3=6x(x-3)$

5.3. Ecuación de segundo grado

Una ecuación de segundo grado es una igualdad donde el máximo exponente de la variable es 2, pudiendo aparecer términos con la variable elevada a 1 e incluso términos independientes (sin la variable).

La ecuación cuadrática se puede presentar de diferentes maneras, que vale la pena estudiar, para poder hacer una más rápida resolución de ellas.

5.3.1. Ecuación incompleta total

Es una ecuación de la forma:

$$ax^2+c=0$$

siendo a y c constantes, con $a\neq 0$. Para este caso de ecuaciones la resolución es siempre de la forma:

$$\begin{aligned} ax^2+c &= 0\\ ax^2 &= -c\\ x^2 &= -\frac{c}{a} \end{aligned}$$

$$x=\sqrt{-\frac{c}{a}} \quad \text{o también} \quad x=-\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

lo que representamos por

$$x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

♢ *Observa que . . .*

La cantidad subradical de esta solución puede ser negativa o positiva, lo que nos conduce a determinar la naturaleza de las raices o soluciones de la ecuación. Estas pueden ser números reales si $-\frac{c}{a} \geq 0$*, o complejas*[2] *si* $-\frac{c}{a} < 0$.

2

5.3.2. Ecuación incompleta binomial

Se trata de una expresión que posee dos términos que poseen la variable, es de la forma:

$$ax^2 + bx = 0$$

Siendo a y b constantes, con $a \neq 0$. Podemos observar que como la variable se encuentra en los dos términos algebraicos podemos factorizar por ella, obteniendo:

$$x \cdot (ax + b) = 0$$

Ahora, tenemos dos número reales (x y $ax+b$), que multiplicados entre si, dan por resultado 0. Lo que quiere decir que al menos uno es 0, por lo tanto obtenemos dos soluciones:

$$\begin{array}{rcl} x_1 = 0 & \text{o} & ax_2 + b = 0 \\ & & x_2 = -\frac{b}{a} \end{array}$$

5.3.3. Ecuación general

La forma general de la ecuación de segundo grado es:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Siendo a, b y c constantes, con $a \neq 0$. Busquemos las soluciones de esta ecuación.

[2]Conjunto de números que no estudiamos, si te interesa puedes ver en www.sectormatematica.cl/complejos

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c &= 0 \\
a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) &= 0 && \text{Como } a\neq 0 \text{ se tiene que} \\
x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a} &= 0 \\
x^2+\frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a} && \text{Completando cuadrados se tiene que} \\
x^2+\frac{b}{2a}2x+\frac{b^2}{4a^2} &= -\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2} \\
\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2-4ac}{4a^2} \\
x+\frac{b}{2a} &= \pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \\
x+\frac{b}{2a} &= \pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{\sqrt{4a^2}} \\
x &= -\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\
x &= \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

Así hemos llegado a establecer una fórmula general que nos permite encontrar las raíces de cualquier ecuación cuadrática, siendo éstas:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \text{y} \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Dentro de la fórmula de la ecuación cuadrática distinguiremos a la cantidad sub radical, llamada *Discriminante*, que la abreviaremos por el símbolo Δ.

$$\Delta=b^2-4ac$$

Veremos que Δ es un factor importante a la hora de conocer las raices de la ecuación de segundo grado ya que:

- Si $\Delta>0$, la ecuación tiene dos soluciones reales y distintas, ya que todo número positivo tiene siempre dos raices reales.
- Si $\Delta=0$, la ecuación tiene una solución real, ya que la única raíz de 0 es 0.
- Si $\Delta<0$, la ecuación no tiene soluciones reales, ya que NO existe ningún número real que elevado a 2 de por resultado un número negativo.

5.3.4. Propiedades de las raices de la ecuación de segundo grado

Al analizar la forma que tienen las raices de la ecuación cuadrática podemos encontrar dos ecuaciones importantes que nacen de la suma y la multiplicación de las raices:

Suma de Raices

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\
&= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\
&= \frac{-b+0-b}{2a} \\
&= \frac{-2b}{2a} \\
&= -\frac{b}{a}
\end{aligned}
$$

Multiplicación de Raices

$$
\begin{aligned}
x_1 \cdot x_2 &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\
&= \frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac}) \cdot (-b-\sqrt{b^2-4ac})}{4a^2} \\
&= \frac{b^2-(b^2-4ac)}{4a^2} \\
&= \frac{4ac}{4a^2} \\
&= \frac{c}{a}
\end{aligned}
$$

Con estas dos propiedades, podemos formar una ecuación de segundo grado conociendo sólo sus raices, ya que:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2$$

O bien, ocupando el hecho de que son raices, es decir que al reemplazarlas en la ecuación general de segundo grado esta se satisface, podemos reemplazarlas en la ecuación factorizada de la forma:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

Y luego multiplicar ambos binomios, ya que de esta manera al reemplazar cualquiera de las soluciones en esta última expresión, esta se satisface.

Veamos un ejemplo de resolución :

♠ Resolvamos la ecuación:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

Primero debemos identificas los coeficientes; $a = 1$, $b = -3$ y $c = 2$, luego las soluciones son:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-3)+\sqrt{(-3)^2-4\cdot(1)\cdot(2)}}{2\cdot(1)} \\ &= \frac{3+\sqrt{9-8}}{2} \\ &= \frac{3+1}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-3)-\sqrt{(-3)^2-4\cdot(1)\cdot(2)}}{2\cdot(1)} \\ &= \frac{3-\sqrt{9-8}}{2} \\ &= \frac{3-1}{2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

◇ **Observa que ...**

No siempre va a ser necesario utilizar la fórmula de la ecuación cuadrática para poder resolver estas ecuaciones, ya que en algunos casos puedes ocupar los métodos de factorización que aprendiste en el capítulo anterior, (cuadrados de binomio, sumas por su diferencia, binomios con término común, etc ...).

Veamos un ejemplo ocupando factorización :

♠ Resolvamos la ecuación:

$$x^2+5x+6=0$$

Si te fijas bien puedes darte cuenta que el costado izquierdo de ésta ecuación es el producto de dos binomios, ya que 5 es la suma entre 3 y 2 y 6 es su producto, por lo tanto tenemos que $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$, asi nuestra ecuación queda de la forma:

$$(x+2)(x+3)=0$$

Luego como tenemos que el producto entre dos números ($x+2$ y $x+3$), es 0, implica que al menos uno de ellos debe ser 0.

$$\Rightarrow x+2=0 \qquad o \qquad x+3=0$$

Resultando dos sencillas ecuaciones de primer grado, cuyas soluciones son $x_1=-2$ y $x_2=-3$.

♣ *Actividad 5.2.*

Resolve las siguientes ecuaciones de segundo grado:

1.	$x^2+7x+12=0$	*8.*	$-x^2+9=0$	*15.*	$3(3x-2)=(x+4)(4-x)$
2.	$x^2-x-2=0$	*9.*	$(x+1)(x-1)=1$	*16.*	$9x+1=3(x^2-5)-(x-3)(x+2)$
3.	$x^2-1=0$	*10.*	$3x^2+2x=0$	*17.*	$(2x-3)^2-(x+5)^2=-23$
4.	$x^2=4$	*11.*	$-x^2-1-2x^2=0$	*18.*	$3x(x-2)-(x-6)=23(x-3)$
5.	$x^2+2x=-1$	*12.*	$3x=x^2-1$	*19.*	$7(x-3)-5(x^2-1)=x^2-5(x+2)$
6.	$x^2+4x-5=0$	*13.*	$10x^2-x^2=9$	*20.*	$(x+4)^3-(x-3)^3=343$
7.	$x^2-110=x$	*14.*	$mx^2-m^2x=0$	*21.*	$(x+2)^3-(x-1)^3=x(3x+4)+8$

5.4. Sistemas de Ecuaciones

Durante el desarrollo de problemas matemáticos puede ocurrir que te encuentres con una ecuación que presente más de una variable[3], en cuyo caso surgirá un problema muy importante, la cardinalidad del conjunto de soluciones de ese tipo de ecuaciones es en general infinita. Por lo tanto necesitamos de otra restricción que deben cumplir nuestras incógnitas para poder encontrarlas, esta nueva restricción la encontramos con una nueva ecuación que en conjunto con la anterior forman lo que llamamos un *Sistema de Ecuaciones*.

Veamos un Ejemplo :

♠ Consideremos la ecuación.

$$2x-y=1 \tag{5.1}$$

Fijate que en éste caso si $x=1$ e $y=1$, la igualdad se cumple, por lo tanto parece que encontramos la solución de la ecuación, pero ¡ojo!, que si $x=5$ e $y=9$ la ecuación también se satisface, por lo tanto las soluciones de estas ecuaciones NO son únicas.

Ahora agregémosle otra ecuación para formar el sistema, es decir una nueva restricción que deban cumplir las incógnitas.

$$x+y=2 \tag{5.2}$$

Ahora, con las ecuaciones (5.1) y (5.2) formamos un llamado sistema de cuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x-y & = & 1 \\ x+y & = & 2 \end{array}\right|$$

Fijémonos que para este sistema existe una única solución para cada variable, estas son $x=1$ e $y=1$, cualquier otro valor para alguna de las incógnitas no cumplirá con al menos una de las ecuaciones.

[3] $3x+2y=5$ es una ecuación de dos *incógnitas* o *variables*.

5.4.1. Resolución de Sistemas de Ecuaciones

Resolver un sistema de ecuaciones es encontrar los valores de las incógnitas que satisfacen **ambas ecuaciones**.

Existen tres métodos equivalentes básicos para encontrar las soluciones de los sistemas, estos son:

1. **Método por Igualación**

   Consiste en despejar la misma incógnita de ambas ecuaciones, y como ésta debe ser equivalente entre ambas las podemos igualar, obteniendo de esta forma una ecuación con una sola incógnita.

   ♠ Consideremos el sistema anterior:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x - y & = & 1 \\ x + y & = & 2 \end{array}\right|$$

De la primera ecuación despejemos y:

$$\begin{array}{rcl} 2x - y & = & 1 \\ 2x & = & 1 + y \\ 2x - 1 & = & y \end{array}$$

Ahora de la segunda ecuación despejemos la misma variable:

$$\begin{array}{rcl} x + y & = & 2 \\ y & = & 2 - x \end{array}$$

Luego, como y de la primera ecuación debe ser el mismo que el de la segunda se tiene que:

$$\begin{array}{rcl} y & = & y \\ 2x - 1 & = & 2 - x \\ 2x + x & = & 2 + 1 \\ 3x & = & 3 \\ x & = & \frac{3}{3} \\ x & = & 1 \end{array}$$

Así, obteniendo una simple ecuación de primer grado logramos obtener la solución para x, ahora para encontrar el valor de y solo debemos reemplazar $x = 1$ en cualquiera de las ecuaciones originales del sistema:

$$\begin{array}{rcl} 2x - y & = & 1 \\ 2 \cdot (1) - y & = & 1 \\ 2 \cdot 1 - 1 & = & y \\ 2 - 1 & = & y \\ y & = & 1 \end{array}$$

De ésta forma logramos encontrar el valor de la otra incógnita, y con una simple ecuación de primer grado.

2. Método por Sustitución

Este método consiste en despejar una incógnita de alguna de las ecuaciones para luego sustituirla en la segunda, de ésta manera obtendremos una ecuación de una sola incógnita.

♠ Consideremos el sistema anterior:

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x-y & = & 1 \\ x+y & = & 2 \end{array}\right|$$

De la primera ecuación despejemos esta vez x.

$$\begin{array}{rcl} 2x-y & = & 1 \\ 2x & = & 1+y \\ x & = & \dfrac{1+y}{2} \end{array}$$

Ahora sustituimos este valor en la segunda ecuación, resultando:

$$\begin{array}{rcll} x+y & = & 2 & \\ \left(\dfrac{1+y}{2}\right)+y & = & 2 & \\ \dfrac{1+y}{2}+y & = & 2 & \quad\cdot 2 \\ 2\cdot\left(\dfrac{1+y}{2}\right)+2\cdot y & = & 2\cdot 2 & \\ 1+y+2y & = & 4 & \\ 3y & = & 4-1 & \\ 3y & = & 3 & \\ y & = & \dfrac{3}{3} & \\ y & = & 1 & \end{array}$$

Como ya sabemos que $y=1$ y $x=\frac{1+y}{2}$ basta reemplazar y encontramos x.

$$\begin{array}{rcl} x & = & \dfrac{1+y}{2} \\ x & = & \dfrac{1+(1)}{2} \\ x & = & \dfrac{2}{2} \\ x & = & 1 \end{array}$$

3. Método por Reducción

Ya sabemos que a una igualdad le podemos sumar a ambos lados la misma cantidad sin alterarla[4], lo que implica que a una ecuación le podemos sumar a ambos lados los miembros de otra ecuación, ya que las partes de esta última no son más que el mismo elemento. Esto quiere decir que si sumamos, o restamos igualdades, obtendremos otra igualdad también válida.

La idea de este método es obtener inteligentemente una tercera ecuación que contenga a solo una de las incógnitas.

♠ Resolvamos el sistema anterior con este método.

$$\left.\begin{array}{rcl} 2x - y &=& 1 \\ x + y &=& 2 \end{array}\right|$$

Sumemos ambas ecuaciones.

$$\begin{array}{rrcl} & 2x - y &=& 1 \\ + & x + y &=& 2 \\ \hline & 3x + 0 &=& 3 \end{array}$$

De esta manera obtenemos una tercera ecuación que también es verdadera para los mismos valores de x e y. Por lo tanto resolviento esta ecuación podremos encontrar los resultados.

$$\begin{array}{rcl} 3x &=& 3 \\ x &=& \dfrac{3}{3} \\ x &=& 1 \end{array}$$

Para encontrar el valor de y basta reemplazar $x = 1$ en cualquiera de las ecuaciones originales.

♠ Resolvamos otro ejemplo con el método de reducción:

$$\left.\begin{array}{rcl} 5x + 3y &=& 10 \\ x - y &=& 2 \end{array}\right|$$

En este ejemplo no nos sería útil sumar o restar las ecuaciones tal como están ya que obtendriamos una tercera ecuación que contendría ambas incógnitas, por lo que antes debemos "arreglarlas".

Podemos multiplicar la segunda ecuación por 3, de ésta forma el sistema quedaría de la forma:

$$\left.\begin{array}{rcl} 5x + 3y &=& 10 \\ x - y &=& 2 \end{array}\right| \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{rcl} 5x + 3y &=& 10 \\ 3x - 3y &=& 6 \end{array}\right|$$

[4]Ver página 58

Ahora podemos sumar ambas ecuaciones obteniendo:

$$\begin{array}{rrcl} & 5x+3y & = & 10 \\ + & 3x-3y & = & 6 \\ \hline & 8x+0 & = & 16 \end{array}$$

De ésta manera obtenemos una simple ecuación de primer grado con una incógnita:

$$\begin{array}{rrcl} & 8x & = & 16 \\ & x & = & \dfrac{16}{8} \\ \Rightarrow & x & = & 2 \end{array}$$

Para encontrar el valor de y se puede hacer un proceso similar[5], o simplemente reemplazar el valor de x en cualquiera de las ecuaciones originales.

5.4.2. Sistemas de Ecuaciones de 3 incógnitas

Los sistemas de 3 incógnitas deben tener a lo menos 3 ecuaciones para ser resolubles[6], y la manera de resolverlos es "transformalos" en un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas que ya sabemos resolver. Generalmente la forma mas fácil de hacerlo es utilizando el método de sustitución.

♠ Veamos un ejemplo :

$$\left.\begin{array}{rcll} x+2y+z & = & 5 & (1) \\ 3x+y-z & = & 2 & (2) \\ x+y+z & = & 0 & (3) \end{array}\right|$$

En este caso podemos despejar de la ecuación (2) la variable z y luego reemplazarla en las ecuaciones (1) y (3).

$$\begin{array}{lrcl} (2) & 3x+y-z & = & 2 \\ & 3x+y & = & 2+z \\ & \Rightarrow \quad z & = & 3x+y-2 \end{array}$$

Luego, al reemplazar en las ecuaciones (1) y (3) resulta:

[5] Por ejemplo multiplicando la primera ecuación por 3 y la segunda por -5 y luego sumar.

[6] Mas adelante en la página 71, veremos que esto no es del todo cierto

$$\begin{array}{rcll}
(1) \qquad x + 2y + z & = & 5 & \\
x + 2y + (3x + y - 2) & = & 5 & \\
4x + 3y - 2 & = & 5 & \\
4x + 3y & = & 7 & (4)
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
(3) \qquad x + y + z & = & 0 & \\
x + y + (3x + y - 2) & = & 0 & \\
4x + 2y - 2 & = & 0 & \\
4x + 2y & = & 2 & (5)
\end{array}$$

Así con las nuevas ecuaciones (4) y (5), formamos un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas que ya sabemos resolver:

$$\left.\begin{array}{rcl}
4x + 3y & = & 7 \\
4x + 2y & = & 2
\end{array}\right|$$

Las podemos restar entre ellas para obtener una sexta ecuación de solo una incógnita:

$$\begin{array}{crcl}
 & 4x + 3y & = & 7 \\
- & 4x + 2y & = & 2 \\
\hline
 & 0 + y & = & 5 \\
 & \Rightarrow \quad y & = & 5
\end{array}$$

Ahora reemplazamos en la ecuación (4):

$$\begin{array}{rcl}
4x + 3y & = & 7 \\
4x + 3 \cdot (5) & = & 7 \\
4x + 15 & = & 7 \\
4x & = & 7 - 15 \\
4x & = & -8 \\
x & = & \dfrac{-8}{4} = -2
\end{array}$$

Y con los valores de y y de x obtenidos reemplazamos en alguna de las ecuaciones originales para obtener z:

$$\begin{aligned} \text{ecuación}(3) \Rightarrow \quad x + y + z &= 0 \\ (-2) + (5) + z &= 0 \\ 3 + z &= 0 \\ \Rightarrow z &= -3 \end{aligned}$$

De esta manera finalmente logramos obtener todos los valores del sistema original.

5.4.3. Casos Especiales

1. **Cuando hay más de una solución**

   En general resolverás sistemas que tienen solo una solución para cada variable, pero puede ocurrir que te encuentres con un sistema al que no puedas llegar a una solución concreta, no porque hagas las cosas mal, sino por que puedes estar en presencia de una sistema *linealmente dependiente* o *l.d.*, que se refiere a que las ecuaciones que lo conforman son productos unas de otras, es decir; podemos obtener una de las ecuaciones del sistema multiplicando otra por algún número real, o sumándolas entre ellas.

   En general, para todo sistema de la forma:

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= c \\ dx + ey &= f \end{aligned}\right|$$

   Si $\exists\ m \in \mathbb{R}$ tal que $a = m \cdot d$, $b = m \cdot e$ y $c = m \cdot f$, entonces las ecuaciones son *linealmente dependientes*. Cuando esto no ocurre y estamos con un sistema que si tiene soluciones únicas se denomina sistema *linealmente independiente* o *l.i.*.

2. **Cuando no hay solución**

   Dado un sistema de cuaciones de la forma:

$$\left.\begin{aligned} ax + by &= c \\ dx + ey &= f \end{aligned}\right|$$

   Si $\exists\ m \in \mathbb{R}$ tal que $a = m \cdot d$, $b = m \cdot e$ y $c \neq m \cdot f$, entonces el sistema no tiene solución.

♣ *Actividad 5.3.*

Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones utilizando los métodos de resolución que te parezcan más convenientes:

1. $\begin{array}{rcl} 7x-2y &=& 5 \\ 5x+3y &=& 2 \end{array}$

2. $\begin{array}{rcl} x-2y &=& 3 \\ 4x+5y &=& 6 \end{array}$

3. $\begin{array}{rcl} 5x+17y &=& 0 \\ 15x+51y &=& 10 \end{array}$

4. $\begin{array}{rcl} 6x-3y &=& 5 \\ -6y+12x &=& 10 \end{array}$

5. $\begin{array}{rcl} ax+by &=& c \\ ax-by &=& c \end{array}$

6. $\begin{array}{rcl} x-ay &=& b \\ bx+y &=& a \end{array}$

7. $\begin{array}{rcl} x+6y &=& 27 \\ 7x-3y &=& 9 \end{array}$

8. $\begin{array}{rcl} 3x-2y &=& -2 \\ 5x-8y &=& -60 \end{array}$

9. $\begin{array}{rcl} 3x+5y &=& 7 \\ 2x-y &=& -4 \end{array}$

10. $\begin{array}{rcl} 7x-4y &=& 5 \\ 9x+8y &=& 13 \end{array}$

11. $\begin{array}{rcl} 9x+16y &=& 7 \\ 4y-3x &=& 0 \end{array}$

12. $\begin{array}{rcl} 14x-11y &=& -29 \\ 13y-8x &=& 30 \end{array}$

13. $\begin{array}{rcl} x+y+z &=& 8 \\ x-\dfrac{y}{3}+\dfrac{4}{3}z &=& 7 \\ 3z-3y-2x &=& 7 \end{array}$

14. $\begin{array}{rcl} x-y+z &=& 0 \\ 2x+y+z &=& 5 \\ y+2z &=& 2 \end{array}$

5.5. Mini Ensayo V Ecuaciones Algebraicas

1. La edad de Cristina es un tercio de la edad de su padre y dentro de 16 años será la mitad, entonces la edad de Cristina es:

   a) 16
   b) 24
   c) 32
   d) 48
   e) 64

2. Sea $x = 2y + 5$, si $x = 3$ entonces $y =$

   a) 1
   b) -1
   c) $3/2$
   d) 4
   e) 11

3. De una torta Gonzalo se come la mitad, Cristian la sexta parte y Paola la tercera parte, ¿qué parte de la torta quedó?

   a) $\frac{1}{3}$

b) 1/6
c) $\frac{1}{9}$
d) 1/18
e) Nada

4. La edad de una persona es $(12a + 8)$ años, ¿hace cuántos años tenía la cuarta parte de su edad actual?

    a) $3a + 2$
    b) $12a + 4$
    c) $3a + 4$
    d) $9a + 8$
    e) $9a + 6$

5. El valor de x en la ecuación $7(5x + 5) = 5(6x + 4)$ es:

    a) -10
    b) -3
    c) 3
    d) 10
    e) 11

6. Si al quíntuplo de un cierto número se le restan 16, se obtiene el triple del mismo número, ¿cuál es el número?

    a) 2
    b) -2
    c) 8
    d) -8
    e) 19/5

7. Gonzalo tiene el doble de dinero que Cristian, si entre ambos se quieren comprar una pelota de $1.000 Gonzalo debería tener el doble de dinero que tiene. ¿cuánto dinero tiene Cristian?

    a) $100
    b) $200
    c) $300
    d) $400
    e) $500

8. Si $x + z = y$, $2y = 3x$ y $x + y + z = 18$, entonces el valor de z es:

    a) 9
    b) 6

c) 4,5
d) 4
e) 3

9. Dada la ecuación $(x+1)^2 = 1$, la suma de sus dos soluciones es igual a:

   a) 0
   b) 2
   c) -2
   d) -1
   e) 1

10. Si $m^2 = 4nh$ entonces la ecuación $x(nx+m) = -h$ tiene:

    a) Dos soluciones.
    b) Una solución.
    c) No tiene soluciones.
    d) Infinitas soluciones.
    e) No se puede determinar la cantidad de soluciones.

11. Si y es el sucesor de x, y x es el triple del antecesor de y, entonces los valores de x e y son respectivamente:

    a) 0 y 1
    b) -1 y 0
    c) 1 y 0
    d) 0 y -1
    e) 0 y 0

12. El producto de las raices de la ecuación $x^2 + x = 12$ es:

    a) 12
    b) -12
    c) 3
    d) -4
    e) -1

13. La semi suma de dos números es 10, y su semi diferencia es 5, ¿cuál es el Mínimo común múltiplo entre dichos números?

    a) 25
    b) 20
    c) 15
    d) 10
    e) 5

14. Cuál debe ser el valor de k para que una de las soluciones de la ecuación $x^2 = 2x - k + 10$ sea 1.

    a) 10
    b) 11
    c) 12
    d) 13
    e) 14

15. La diferencia entre un número y su cuarta parte es 9, entonces el doble del número es:

    a) 12
    b) 18
    c) 24
    d) 36
    e) 90

16. Cristian es 3 años mayor que Gonzalo, en 5 años más sus edades sumarán 35 años, ¿Qué edad tiene Gonzalo?

    a) 11
    b) 14
    c) 16
    d) 19
    e) 20

17. Si $1 - \frac{3}{x} = 9$ entonces $x =$

    a) $-\frac{9}{2}$
    b) $-\frac{2}{9}$
    c) $\frac{9}{2}$
    d) $\frac{8}{3}$
    e) $-\frac{3}{8}$

18. La suma de las soluciones del sistema, $\left.\begin{array}{rcl} x+y & = & z \\ 2x+z & = & 3y-1 \\ 2y+x & = & 5 \end{array}\right|$ es:

    a) 1
    b) 2
    c) 3
    d) 6
    e) 0

19. Las raíces de la ecuación $x(x-1)=20$ son:

    a) 1 y 20
    b) 2 y 20
    c) 4 y 5
    d) 4 y -5
    e) -4 y 5

20. Una ecuación que tenga por raíces a $x_1 = 2+\sqrt{2}$ y $x_2 = 2-\sqrt{2}$ es:

    a) x^2+4x+2
    b) x^2+4x-2
    c) $-x^2-4x+2$
    d) x^2-4x+2
    e) x^2-4x-2

Capítulo 6

Ecuaciones no Algebraicas

Generalmente para lograr resolver problemas de la vida cotidiana utilizando matemática, se ocupan ecuaciones algebraicas, ya que estas son suficientes para la mayoría de los problemas que nos puedan acontecer.

Sin embargo, en el estudio más acabado de la matemática te encontrarás en circunstancias en que un problema solo puede ser resuelto con las llamadas *Ecuaciones no Algebraicas*, como por ejemplo para describir fenómenos del electromagnetismo.

Las llamadas ecuaciones no algebraicas son aquellas en que la incógnita o variable a encontrar no esta presente en un polinomio, por lo que no nos serán de utilidad los métodos de resolución que vimos anteriormente.

Las ecuaciones no algebraicas que estudiaremos son principalmente las *Ecuaciones Exponenciales* y las *Ecuaciones Logaritmicas*.

Versión 1.0, Enero de 2008

6.1. Ecuación Exponencial

Las ecuaciones exponenciales son aquellas ecuaciones en que la incógnita esta presente en el exponente de una cantidad.

♠ Por ejemplo:

† $3^{x+1} + 1 = 2$, Si es una ecuación exponencial.

† $3x^2 + 8x = 8$, No es una ecuación exponencial.

6.1.1. Resolución de Ecuaciones Exponenciales

Para resolver las ecuaciones exponenciales principalmente ocupamos las siguientes propiedades:

1. $a^b = a^c \Leftrightarrow b = c$
2. $a^b = c^b \Leftrightarrow a = c$

Es decir, debemos lograr igualar las bases de las potencias de éstas ecuaciones para de ésta manera poder "trasformar" una ecuación exponencial en una ecuación algebraica.

♠ Ejemplo 1

$$\begin{aligned} 5^{x+9} &= 125 \\ 5^{x+9} &= 5^3 \\ \Rightarrow x+9 &= 3 \\ x &= 3-9 \\ x &= -6 \end{aligned}$$

♠ Ejemplo 2

$$\begin{aligned} 3^{x+1}-2 &= 25 \\ 3^{x+1} &= 25+2 \\ 3^{x+1} &= 27 \\ 3^{x+1} &= 9\cdot 3 \\ 3^{x+1} &= 3\cdot 3\cdot 3 \\ 3^{x+1} &= 3^3 \\ \Rightarrow x+1 &= 3 \\ x &= 3-1 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

♠ Ejemplo 3

$$\begin{aligned} 8^{4x-8}-9 &= -8 \\ 8^{4x-8} &= -8+9 \\ 8^{4x-8} &= 1 \\ 8^{4x-8} &= 8^0 \\ \Rightarrow 4x-8 &= 0 \\ 4x &= 8 \\ x &= \frac{8}{4} \\ x &= 2 \end{aligned}$$

♣ *Actividad 6.1.*

Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

1. $2^{x-5}=1$
2. $4^{3x+6}-2^{2x-7}=0$
3. $8^{3x+5}=4^{x-1}$
4. $10^{x(x+1)}=1$
5. $256^{2x+5}-2^x=2^x$
6. $4^x=\frac{1}{64}$
7. $\sqrt[4]{a^{6x+2}}=a^{x-9}$
8. $\sqrt{4^x}-\sqrt[3]{8^{x+1}}=0$
9. $\pi^{9^x}=\pi$
10. $\sqrt[10]{9^{x^2}}=3$
11. $\sqrt[5]{32^x-1}-1=0$
12. $\sqrt{1024^{2x+8}}=2^x$
13. $81^x=\frac{1}{243}$

6.2. Ecuación Logarítmica

6.2.1. Significado de un Logaritmo

El logaritmo de un número es el exponente al que hay que elevar otro número llamado base para obtener el número en cuestión.

♠ Por ejemplo, veamos las potencias del número 3.

$$\begin{aligned} 3^0 &= 1 \\ 3^1 &= 3 \\ 3^2 &= 9 \\ 3^3 &= 27 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Así, el logaritmo en base 3 de 1 es 0, ya que 0 es el exponente al que hay que elevar 3 para dar por resultado 1; de la misma manera el logaritmo de base 3 de 3 es 1, el logaritmo en base 3 de 9 es 2, el logaritmo en base 3 de 27 es 3, etc.

La notación que ocupamos para representar los logaritmos es la siguiente:

$$\log_a b = c$$

Y se lee *el logaritmo en base a de b es c.*
La notación anterior del logaritmo, la podemos explicar de la siguiente manera:

$$\log_a b = c \quad \Leftrightarrow \quad a^c = b$$

Cuando no se escribe la base de un logaritmo se asume que esta es 10, es decir:

$$\log a = \log_{10} a$$

6.2.2. Propiedades de los Logaritmos

1. **La base de un logaritmo no puede ser negativa,** ya que si lo fuera sus potencias pares serían positivas y las impares negativas, y tendríamos una serie de números alternadamente positivos y negativos, resultando números positivos que no tendrían logaritmo.

2. **Los números negativos no tienen logaritmo,** ya que siendo la base positiva, cualquiera de sus potencias es siempre un número positivo.

3. **Para cualquier logaritmo, el logaritmo de la base es siempre 1,** pues siendo una base a, entonces $a^1 = a$, es decir:
$$\log_a a = 1 \quad \forall \quad a$$

4. **Para cualquier logaritmo, el logaritmo de 1 es 0,** pues para todo $a \neq 0$ se tiene que $a^0 = 1$, es decir:
$$\log_a 1 = 0 \quad \forall \quad a$$

5. El logaritmo de un producto, es la suma de sus logaritmos, es decir:

$$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

6. El logaritmo de un cociente, es la diferencia de sus logaritmos, es decir:

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$$

7. El logaritmo de una potencia, es el producto entre el exponente y el logaritmo de la base, es decir:

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

8. El logaritmo de una raíz, es el cociente entre el logaritmo de la cantidad sub-radical y el índice de la raíz, pues $\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$ y ocupamos la propiedad anterior para las potencias, es decir:

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \cdot \log_a b$$

9. El cambio de base; se cumple siempre para el logaritmo en cualquier base de cualquier número que:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad \forall \quad c$$

6.2.3. Resolución de Ecuaciones Logarítmicas

Para resolver las ecuaciones logarítmicas principalmente ocupamos la siguiente propiedad:

$$\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$$

Por lo tanto para lograr resolverlas, la idea es lograr dejar la ecuación en cuestión de la forma log(*algo*)=log(*algo mas*).

Veamos algunos ejemplos :

♠ Ejemplo 1

$$\begin{array}{rrcl}
 & \log(11x+5) & = & \log(x+1)+1 \\
 & \log(11x+5) & = & \log(x+1)+\log 10 \\
 & \log(11x+5) & = & \log((x+1)\cdot 10) \\
 & \log(11x+5) & = & \log(10x+10) \\
\Rightarrow & 11x+5 & = & 10x+10 \\
 & 11x-10x & = & 10-5 \\
 & x & = & 5
\end{array}$$

♠ Ejemplo 2

$$\begin{array}{rrcl}
 & \log(3-x^2) & = & \log(2)+\log(x) \\
 & \log(3-x^2) & = & \log(2\cdot x) \\
\Rightarrow & 3-x^2 & = & 2x \\
 & 0 & = & x^2+2x-3 \\
 & 0 & = & (x-1)(x+3) \\
\Rightarrow & x_1 = 1 & \text{y} & x_2 = -3
\end{array}$$

Fíjate que en el último ejemplo al sustituir el valor -3 en la ecuación original esta queda: $\log(-6) = \log(2) + \log(-3)$, sin embargo el logaritmo de números negativos NO existe, por lo tanto la única solución es $x = 1$.

Recuerda siempre comprobar tus resultados.

♠ Ejemplo 3

$$(\log(x))^2 = 35 - 2\log(x)$$

En este caso podemos ocupar variable auxiliar,consideremos que $\log(x) = y$

$$\begin{array}{rcl} \Rightarrow \quad (y)^2 &=& 35 - 2(y) \\ 0 &=& y^2 + 2y - 35 \\ 0 &=& (y-5)(y+7) \\ \Rightarrow \quad y_1 = 5 & \text{y} & y_2 = -7 \\ \log(x_1) = 5 & \text{y} & \log(x_2) = -7 \\ x_1 = 10^5 & \text{y} & x_2 = 10^{-7} \end{array}$$

♣ *Actividad 6.2.*

I. *Calcula los siguientes logaritmos:*

1. $\log_4 64 =$	*4.* $\log_{16} 8 =$	*7.* $\log_{81} 3 =$
2. $\log_{1/3} 9 =$	*5.* $\log_{125} 25 =$	*8.* $\log_4 32 - \log_2 16 =$
3. $\log(\pi^0) =$	*6.* $\log_1 5 =$	*9.* $\log_b(b^b) =$

II. *Resuelve las siguientes ecuaciones logarítmicas:*

1. $\log(x+1) = \log(2x-5)$	*5.* $\log(x+3) - \log(x+4) = \log(x-7) - \log(x-4)$
2. $\log 5 + \log(x+4) = \log(x-8)$	*6.* $(\log(x))^2 - 2\log(x) = -1$
3. $\log(x+7) + \log(x-3) = \log(x^2+3)$	*7.* $5(\log(x))^2 - 2\log(x) = 3$
4. $\log(x+8) - \log(x) = \log(3x+9)$	*8.* $\log(x+1) + \log(x+3) = \log(x-2) + \log(x-3)$

6.3. Aplicación de los Logaritmos a las ecuaciones exponenciales

En la resolución de las ecuaciones exponenciales existen el casos en que no podremos resolverlas igualando las bases, sencillamente porque no será posible. Para estas situciones es posible ocupar los logaritmos.

Veamos algunos ejemplos :

♠ Ejemplo 1

$$\begin{array}{rcll} 7^x &=& 6 & /\log() \\ \log(7^x) &=& \log(6) & \\ x \cdot \log(7) &=& \log(6) & \\ x &=& \dfrac{\log(6)}{\log(7)} & \\ x &=& \log_7 6 & \end{array}$$

♠ Ejemplo 2

$$\begin{aligned}
2^{x+1}\cdot 5^{x} &= 9 \qquad\qquad / \log() \\
\log(2^{x+1}\cdot 5^{x}) &= \log(9) \\
\log(2^{x+1}) + \log(5^{x}) &= \log(9) \\
(x+1)\log(2) + x\log(5) &= \log(9) \\
x\log(2) + \log(2) + x\log(5) &= \log(9) \\
x\log(2) + x\log(5) + \log(2) &= \log(9) \\
x(\log(2)+\log(5)) + \log(2) &= \log(9) \\
x(\log(2)+\log(5)) &= \log(9) - \log(2) \\
x(\log(2)+\log(5)) &= \log(9/2) \\
x\log(2\cdot 5) &= \log(9/2) \\
x\log(10) &= \log(9/2) \\
x\cdot 1 &= \log(9/2) \\
x &= \log(9/2)
\end{aligned}$$

♣ *Actividad 6.3.*

Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales ocupando logarítmos:

1.	$2^{x+3}=4$	*5.*	$2^{x-1}\cdot 5^{x-1}=250$
2.	$16^{x-2}=128^{x+4}$	*6.*	$2^{x-2}\div 5^{x-1}=0{,}032$
3.	$5^{2x}=10.000$	*7.*	$\sqrt[x]{4}\cdot\sqrt[x]{5}=400$
4.	$3^{x-4}\cdot 7^{x-3}=147$	*8.*	$2^{x-3}+2^{x-2}+2^{x-1}+2^{x+1}=\frac{23}{12}$

6.4. Mini Ensayo VI Ecuaciones no Algebraicas

1. ¿Cuál es el valor de x en la ecuación $5^x+5^{x+1}+5^{x+2}=155$?

   a) 1
   b) 2
   c) 3
   d) 1/3
   e) -3

2. Determine el valor de $\log_3(0,\overline{1})$

   a) $-1/3$
   b) -2
   c) 1/3

d) 2
e) $\sqrt[3]{9}$

3. ¿Al antecesor de que número debe elevarse 2 para obtener 32?

a) 2
b) 3
c) 4
d) 5
e) 6

4. La expresión $\frac{\log_a b}{\log_a c}$ es equivalente a:

a) $\log_a a$
b) $\log_c b$
c) $\log_b c$
d) $\log_a(b+c)$
e) $\log_a(b \cdot c)$

5. Si $\log \sqrt{a} = 0{,}7186$, entonces $\log a^2 =$

a) $(0{,}7186)^4$
b) 4,7186
c) $2\log(0{,}7186)$
d) $4 \cdot 0{,}7186$
e) $4\log 0{,}7186$

6. En la expresión $\log_m(n \cdot m^3) = 3$, si $m > 1$ entonces $n =$

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) No se puede determinar.

7. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es FALSA?

a) El logaritmo de 1 en cualquier base, siempre es 0.
b) $x \log_a a^x = x^2$
c) La base de un logaritmo no puede ser negativa
d) El logaritmo de una suma es el producto de los logaritmos
e) El logaritmo de un cociente es la diferencia de los logaritmos

8. El valor de x en la ecuación $10^x = 2$ es:

a) $\log_2 10$
b) $\log 5 - 1$
c) $1 - \log 5$
d) $-\log_2 10$
e) $\log 2{,}01$

9. Si $4^x = \frac{1}{64}$ entonces $x =$

a) -3
b) 3
c) -2
d) 2
e) $\log_4 64$

10. Si $2^{x-5} = 1$, entonces el valor de $\log_x 5$ es:

a) 0
b) -1
c) -5
d) 5
e) 1

11. Dada la ecuación $\log(x+1) = -1$ el valor x corresponde a:

a) $1{,}1$
b) $0{,}9$
c) 0
d) $-0,9$
e) -2

12. Si $\log\left(\frac{1}{1-x}\right) = 2$, entonces x vale

a) $-0{,}99$
b) -99
c) $0{,}99$
d) $-1{,}01$
e) $\frac{19}{20}$

13. Si $x = b$ entonces $\log a^{x-b} + \log b^{b-x} + \log x^2 - \log b^2$ es igual a:

a) $x + b$
b) 0
c) 1
d) $a - b$

e) Ninguna de las anteriores.

14. Si $\log_x a = 2$, entonces $\log_x (ax)^2 =$

 a) 4
 b) $\log_x(2a)$
 c) $\log_x x^6$
 d) $2\log_x x$
 e) $2a$

15. Cual es el valor de x en la ecuación $\log(x+2) + \log(x+3) = \log 2$

 a) -4 y -1
 b) -4
 c) 1
 d) -1
 e) 4

16. El valor de x en la ecuación $a^x = bc$ es:

 a) $\log b + \log c - \log a$
 b) $\log a + \log b - \log c$
 c) $\log a - \log b - \log c$
 d) $\frac{\log b + \log c}{\log a}$
 e) Ninguna de las anteriores.

17. Sea a un número distinto de 0, entonces el valor de la expresión $\sqrt[a]{\frac{4^{a+2} - 4^a}{15}}$ es:

 a) $4\sqrt[a]{\frac{1}{15}}$
 b) $\sqrt[a]{\frac{1}{15}}$
 c) 4^a
 d) 4
 e) Ninguna de las anteriores.

18. Si $2^{2x} = 8$, ¿cuántas veces x es igual a 9?

 a) 6
 b) $\frac{9}{2}$
 c) 3
 d) $3/2$
 e) Ninguna de las anteriores.

Capítulo 7

Inecuaciones

Dentro del mundo de la resolución de problemas te encontrarás en ocaciones en que la incógnita que deseas encontrar no tiene tantas restricciones que la hacen ser única para satisfacer alguna ecuación, existen casos en que la solución puede ser el conjunto completo de los números positivos por ejemplo, o todos los número mayores que 1.000.000, que por cierto en ambos casos la cantidad de soluciones son infinitas[1].

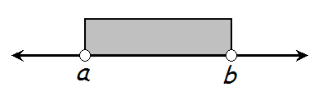
Versión 1.0, Enero de 2008

7.1. Intervalo

Como ya sabemos el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$, lo podemos representar en una recta numérica. Por lo tanto cada segmento de ésta recta representa a un subconjunto de $\mathbb{R}$, cada uno de éstos subconjuntos se denomina *Intervalo*. Existen distintos tipos de intervalos.

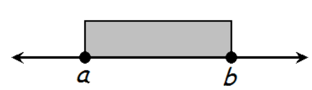
7.1.1. Intervalo Abierto

Un intervalo abierto de a a b, con $a < b$, es el conjunto de todos los número reales que cumplen que son mayores que a y menores que b, es decir, son todos los $x \in \mathbb{R}$ tal que $a < x < b$. Se denota como $]a, b[$ y su representación gráfica es:



7.1.2. Intervalo Cerrado

Un intervalo cerrado de a a b, con $a < b$, es el conjunto de todos los número reales que cumplen que son mayores o iguales que a y menores o iguales que b, es decir, son todos los $x \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq x \leq b$. Se denota como $[a, b]$ y su representación gráfica es:

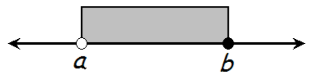


[1]**Infinito :** Que no tiene fin en cantidad o en espacio. Matemáticamente se escribe con el símbolo ∞ y representa un valor mayor que cualquier cantidad asignable. –Diccionario Enciclopédico Ilustrado NORMA–

7.1.3. Intervalo Semi-Abierto

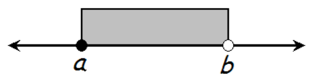
1. **Por la Izquierda**

   Un intervalo semi-abierto por la izquierda es el conjunto de todos los número reales que cumplen que son mayores que a y menores o iguales que b, es decir, son todos los $x \in \mathbb{R}$ tales que $a < x \leq b$. Se denota como $]a, b]$ y su representación gráfica es:

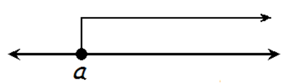
2. **Por la Derecha**

   Un intervalo semi-abierto por la derecha es el conjunto de todos los número reales que cumplen que son mayores o iguales que a y menores que b, es decir, son todos los $x \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq x < b$. Se denota como $[a, b[$ y su representación gráfica es:

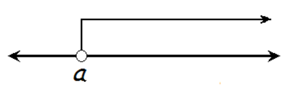
   

Tambián existen intervalos que no tienen límite superior o inferior (en los casos anteriores el límite inferior era a y el superior b), en el primer caso ocupamos el símboplo $+\infty$ o simplemente ∞ y en el segundo el símbolo $-\infty$, que significan, “mas infinito” y “menos infinito” respectivamente.

Por ejemplo veamos el conjunto formado por todos los números que son mayores o iguales que a, es decir, todos los $x \in \mathbb{R}$ tales que $a \leq x$, este conjunto lo denotamos como $[a, +\infty[$, y gráficamente se vería como:



Si el intervalo fuera $]a, +\infty[$, es decir, todos los $x \in \mathbb{R}$ tales que $a < x$, entonces:



7.2. Desigualdades

Las desigualdades son todas aquellas expresiones algebraicas que poseen alguno de los cuatro símbolos de desigualdad $(<, >, \leq, \geq)$[2].

7.2.1. Desigualdad Absoluta

Análogamente al concepto de identidad[3], una desigualdad es absoluta cuando se satisface para cualquier valor de sus incógnitas o variables.

[2]Ver Simbología, tras la portada.

[3]Ver página 57

♠ Por ejemplo:

† $x^2 \geq 0$

† $(x+y)^2 \geq 0$

† $z < z+1$

Son desigualdades absolutas, pues para cualquier valor real de sus variables que reemplaze, estas desigualdades se seguirán cumpliendo.

7.2.2. Desigualdad Condicionada o Inecuación

Análogamente al concepto de ecuación[4], una desigualdad es condicionada cuando se satisface solo para algunos valores de sus incógnitas o variables.

♠ Por ejemplo:

† $x+1 \geq 0$, sólo se cumple si $x \geq -1$

† $2y > 10$, sólo se cumple si $y > 5$

† $z+1 < 6$, sólo se cumple si $z < 5$

Estas son las llamada inecuaciones.

7.3. Resolución de Inecuaciones

Antes de comenzar esta parte veamos las siguientes reglas o axiomas que nos hablan sobre el orden en los números reales:

1^{ero} **Axioma de Tricotomía**

Sean a y $b \in \mathbb{R}$, entonces entre ellos solo cumplen **una y solo una** de las siguientes afirmaciones:

$$a < b, \qquad a = b \qquad a > b$$

2^{do} **Axioma de Transitividad**

Sean a, b y $c \in \mathbb{R}$, tales que $a < b$ y $b < c$ entonces siempre $a < c$.

3^{ero} **Axioma de Adición**

Sean a, b y $c \in \mathbb{R}$, tales $a < b$ entonces siempre $a + c < b + c$.

4^{to} **Axioma de Multiplicación**

Sean a, b y $c \in \mathbb{R}$, tales $a < b$ y $c > 0$ entonces siempre $a \cdot c < b \cdot c$.

♢ *Observa que . . .*

Del último axioma se deduce entonces que si $a < b$ y $c < 0$ entonces $a \cdot c > b \cdot c$.
En otras palabras, multiplicar una desigualdad por un número negativo cambiará la dirección de la desigualdad.

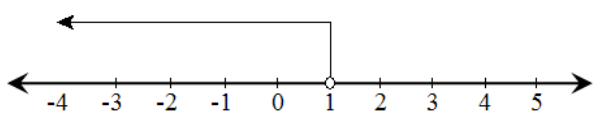
[4] Ver sección 5.1

Veamos algunos ejemplos :

♠ Ejemplo 1

$$\begin{array}{rcll}
5x+7 & < & 12 & \rightarrow \text{ Ocupando el axioma de adición podemos sumar a ambos lados el número } -7. \\
5x+7+-7 & < & 12-7 & \rightarrow \text{ Como } -7 \text{ es el inverso aditivo de 7 implica que } 7+-7=0. \\
5x+0 & < & 5 & \\
5x & < & 5 & \rightarrow \text{ Luego ocupando el axioma de la multiplicación podemos multiplicar a ambos lados por } \frac{1}{5}. \\
5x\cdot 1/5 & < & 5\cdot 1/5 & \rightarrow \text{ Al lado izquierdo podemos conmutar} \\
x\cdot 5\cdot 1/5 & < & 1 & \rightarrow \text{ Obteniendo finalmente.} \\
x\cdot 1 & < & 1 & \\
x & < & 1 & \rightarrow \text{ Lo que implica que el conjunto solución es }]-\infty,1[.
\end{array}$$

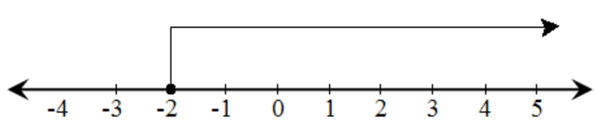
Gráficamente la solución se ve:



♠ Ejemplo 2

$$\begin{array}{rcll}
3-2x & \leq & 7 & \rightarrow \text{ Ocupando el axioma de adición podemos sumar a ambos lados el número } -3. \\
3+-3-2x & \leq & 7+-3 & \rightarrow \text{ Como } -3 \text{ es el inverso aditivo de 3 implica que } 3+-3=0. \\
0-2x & \leq & 4 & \\
-2x & \leq & 4 & \rightarrow \text{ Luego podemos multiplicar a ambos lados por } -\frac{1}{2} \text{ teniendo cuidado que } -\frac{1}{2} \text{ es negativo por lo tanto, cambia la dirección de la desigualdad.} \\
-2x\cdot -1/2 & \geq & 4\cdot -1/2 & \rightarrow \text{ Al lado izquierdo podemos conmutar} \\
x\cdot -2\cdot -1/2 & \geq & -2 & \rightarrow \text{ Obteniendo finalmente.} \\
x\cdot 1 & \geq & -2 & \\
x & \geq & -2 & \rightarrow \text{ Lo que implica que el conjunto solución es }]-2,+\infty[
\end{array}$$

Gráficamente la solución se ve:

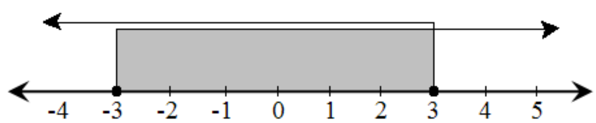


♠ Ejemplo 3

$$\begin{array}{rcll} x^2-2 & \leq & 7 & \to \text{Ocupando el axioma de adición podemos sumar a ambos lados el número 2.} \\ x^2-2+2 & \leq & 7+2 & \\ x^2+0 & \leq & 9 & \\ x^2 & \leq & 9 & \to \text{En éste paso debemos tener especial cuidado, pues pueden haber dos posibilidades} \\ \text{Caso 1} \to \quad x & \leq & 3 & \to \text{En este caso se tiene que el conjunto solución es }]-\infty,3] \\ \text{Caso 2} \to \quad x & \geq & -3 & \to \text{En este caso se tiene que el conjunto solución es } [-3,\infty[\end{array}$$

Por lo tanto El conjunto solución de esta inecuación debe ser uno que cumpla con estas dos últimas restricciones, es decir ser mayor o igual que -3 y a la vez de menor o igual que 3.

Gráficamente podemos ver que los números que cumplen esto son los que están entre -3 y 3, considerando a éstos últimos.



En éste tipo de casos decimos que el conjunto solución será producto de la intersección entre los dos conjuntos solución particulares.

$$\text{Solución} \quad \to \quad [-3,+\infty[\,\cap\,]-\infty,3]=[-3,3]$$

♠ Ejemplo 4

$$\begin{array}{rcll} 6/x & < & 3 & \to \text{En éste caso podemos ocupar el axioma de multiplicación (multiplicando por } x\text{), pero teniendo cuidado de que } x \text{ puede ser positivo o negativo, por lo tanto recaemos en dos casos} \end{array}$$

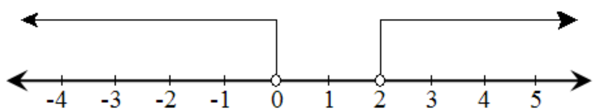
Caso 1 : Si $x>0$

$$\begin{array}{rcll} 6 & < & 3x & \\ 6/3 & < & x & \\ 2 & < & x & \to \text{En este caso se tiene que el conjunto solución es }]2,+\infty[\end{array}$$

Caso 2 : Si $x<0$

$$\begin{array}{rcll} 6 & > & 3x & \\ 6/3 & > & x & \\ 2 & > & x & \to \text{En este caso se tiene que el conjunto solución es }]-\infty,2[\text{, pero hay que tener cuidado pues una condición del caso fue que } x<0\text{, por lo tanto el verdadero conjunto solución será }]-\infty,0[\end{array}$$

El conjunto solución de la inecuación debe ser uno que cumpla con alguna de estas restricciones, ser mayor que 2 o menor que 0. Gráficamente podemos ver lo números que cumplen a lo menos una:



En éste tipo de casos decimos que el conjunto solución será producto de la unión entre los dos conjuntos solución particulares.

$$\text{Solución} \quad \rightarrow \quad]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$$

♣ *Actividad 7.1.*

I. *Representa gráficamente los siguientes intervalos:*

1.	$]2{,}6[$	*4.*	$[-100, +\infty[$	*7.*	$[0{,}1]$
2.	$[6{,}2[$	*5.*	$]-\infty, +\infty[$	*8.*	$]\sqrt[5]{3}, \sqrt[3]{2}]$
3.	$]-\infty{,}0]$	*6.*	$[1{,}2[$	*9.*	$]e.\pi[$

II. *Determina el intervalo y grafica las siguientes desigualdades:*

1.	$1 < x$	*4.*	$\infty < x$	*7.*	$x \geq 12$
2.	$2 \geq x$	*5.*	$2 < x < 9$	*8.*	$0 > x \geq 10$
3.	$\pi < x$	*6.*	$8 \leq x < 9$	*9.*	$-8 > x > -7$

III. *Resuelve las siguientes inecuaciones, determina su conjunto solución, si existe, y grafícalo:*

1.	$x + 1 > 6$	*4.*	$8 - 3x < 2$	*7.*	$x^2 + 1 \geq 10$
2.	$x - 5 < 1 - x$	*5.*	$-x + 1 < 4$	*8.*	$\frac{8}{x} > 2$
3.	$2x + 5 \leq 1$	*6.*	$(x + 1)^2 < 1$	*9.*	$1 + x > 2x - 9$

7.4. Mini Ensayo VII Desigualdades e Inecuaciones

1. El intervalo solución de la inecuación $-3x + 1 < 7$ es:

    a) $]-2, +\infty[$
    b) $]-\infty, 2[$
    c) $]-\infty, 8/3[$
    d) $]-\infty, -8/3[$
    e) $]-8/3, 8/3[$

2. Si $x \in [1, 4[$ entonces $(2x + 1)$ pertenece a:

    a) $[1, 4[$
    b) $[3, 9[$
    c) $[1, 4]$
    d) $]1, 4]$
    e) $]3, 9]$

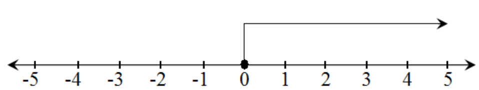
3. Si $a < b$, $b < c$ y $c < 0$ entonces es falso que:

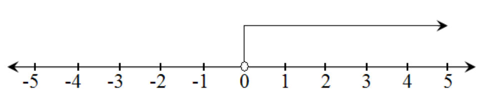
    a) $c < b - a$
    b) $a < c$
    c) $ac > bc$
    d) $a + c > b + c$
    e) $a - b < 0$

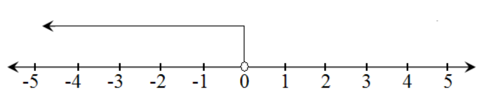
4. Si $x \in [a, b[$ entonces:

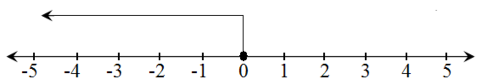
    a) $a \leq x \leq b$
    b) $a < x < b$
    c) $a \leq x < b$
    d) $a < x \leq b$
    e) $a > x > b$

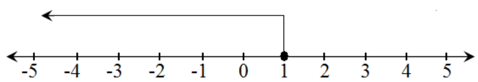
5. La representación gráfica de la solución de la inecuación $\frac{3-2x}{2} \geq \frac{15}{10}$ es:

    a) 

    b) 

    c) 

d) 

e) 

6. Si $a < b < c < d$ entonces $[a, c[\cup]b, d] =$

    a) $[a, d]$

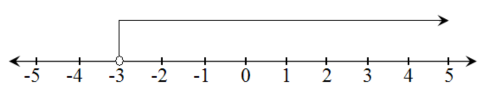
    b) $[c, b]$

    c) $]a, d[$

    d) $[a, d[$

    e) $]a, d]$

7. La figura corresponde a la solución de :

    a) $x \geq 3$

    b) $4 > 1 - x$

    c) $-3 \leq x$

    d) $-3 > x$

    e) $x < 3$

8. Si $a < b < c < d$ entonces $[a, c[\cap]b, d] =$

    a) $[c, b]$

    b) $[a, d]$

    c) $]a, d[$

    d) $]b, c[$

    e) $[b, c]$

9. La solución del siguiente sistema de inecuaciones es:

$$\begin{array}{rcl|} 4x + 2 & > & 1 \\ 6x & \leq & 2 \\ \hline \end{array}$$

    a) $-\frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{3}$

    b) $\frac{1}{4} < x \leq \frac{1}{3}$

    c) $-\frac{1}{3} < x \leq \frac{1}{4}$

    d) $-\frac{1}{3} < x \leq -\frac{1}{4}$

    e) $-\frac{1}{4} < x$

Capítulo 8

Funciones

El concepto de función es sin duda uno de los más importantes para todo hombre de ciencia, al estudiar distintos fenómenos que ocurren en nuestro mundo siempre se trata de obtener relaciones entre ellos, de que dependen, porque ocurren, que pasaría si cambiaramos un factor, en fin, todos estos objetivos se resumen en encontrar una función que relacione causa y efecto de los acontecimientos del mundo que nos rodea.

En el presente capítulo estudiaremos los conceptos más básicos en el estudio de funciones; tipos de funciones, representaciones y ejemplos.

Versión 1.0, Febrero de 2008

8.1. El Concepto de Función

Una función es una regla que relaciona los elementos de dos conjuntos, es decir a todos los elementos de un conjunto inicial que llamaremos *Dominio*[1] le asigna por medio de alguna regla, uno y solo uno de los elementos de un conjunto final que llamaremos *Codominio*, al elemento inicial se le conoce como *Preimagen* y el elemento que se le asigna a través de la función como *Imagen*.

♠ Podríamos considerar, por ejemplo, que una función f es una especie de máquina a la que cuando ingresa un elemento de un Dominio $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ se le es asignado un elemento de el Codominio $B = \{a, b, c, d, e, f\}$.

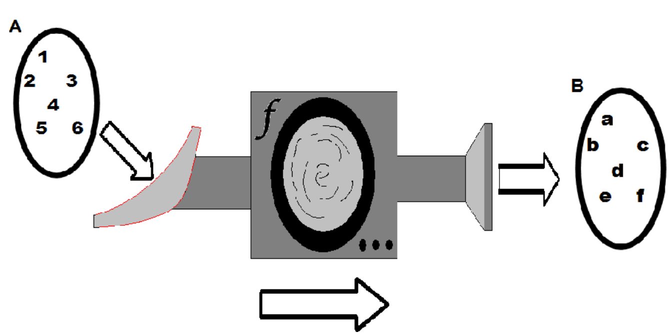


Figura 8.1: Función f, que transforma un elemento de A en uno de B

[1]Lo podemos abreviar como *Dom(f)*

A ésta máquina la representaremos matemáticamente por $f(x)$ que se lee "efe de equis". Y para indicar el dominio y el codominio de la función usaremos la notación: $f : A \to B$, donde A es el dominio y B es el codominio.

El conjunto formado por todas las imágenes de una función es conocido domo *Recorrido*[2].El Recorrido de una función es un subconjunto del codominio de la misma.

A las funciones se les puede clasificar por la manera de relacionar los elementos del Dominio con los del Codominio.

8.1.1. Funciones Inyectivas

Las funciones inyectivas son aquellas en que ningún elemento del recorrido es imagen de más de un elemento del dominio, es decir, no existen dos o más preimágenes que vayan a dar a la misma imagen.

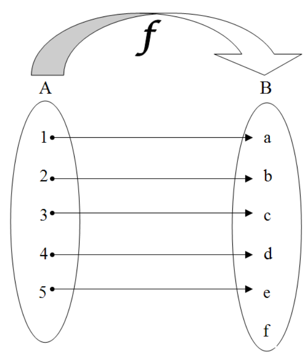


Figura 8.2: Ejemplo de Función Inyectiva

8.1.2. Funciones Sobreyectivas o Epiyectivas

Las funciones sobreyectivas, también conocidas como epiyectivas, son todas aquellas en que todos los elementos del codominio son imágenes de a lo menos un elemento del dominio, es decir, el codominio es igual al recorrido.

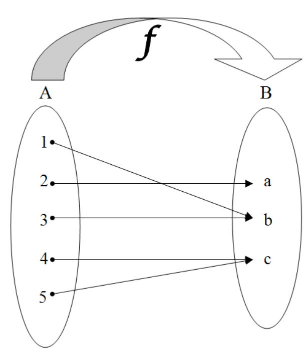


Figura 8.3: Ejemplo de Función Sobreyectiva

[2]Lo podemos abreviar como *Rec(f)*

8.1.3. Funciones Biyectivas

Las funciones biyectivas son todas aquellas que son inyectivas y sobreyectivas al mismo tiempo, es decir, cada imagen tiene una y solo una preimagen y no existen elementos del codominio que no tengan preimagen.

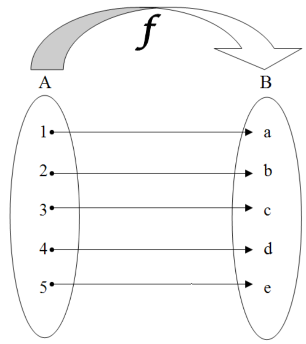


Figura 8.4: Ejemplo de Función Biyectiva

8.1.4. Composición de Funciones

Sean f y g dos funciones talque $f : A \to B$ y $g : B \to C$. Entonces definiremos la composición entre f y g de la forma $g \circ f$, que se lee "efe compuesto con ge" y generamos una nueva función que toma un elemento de A, lo lleva a través de f a B y luego a través de g lo lleva a C, por lo tanto:

$$g \circ f : A \to C$$

8.1.5. La Función Inversa

La inversa de una función es aquella cuyo dominio es igual al recorrido de la función original y su recorrido es igual al dominio de la misma función, es decir; si $f : A \to B$ entonces $f^{-1} : B \to A$, observa que para que se mantenga el concepto de función para la función inversa ésta solo puede existir para las funciones biyectivas pues ningún elemento de B puede no tener imagen a través de la función inversa, lo que obliga a que todos los elementos de B llege algún elemento de A (sobreyectividad), y además que llegue solo uno (inyectividad), pues cuando la función inversa actúe debe asignarle uno y solo uno de los elemento de A a cada elemento de B.

♠ Por ejemplo:
Sean $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ y $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$, sea $f : A \to B$ talque $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2$, $f(a_3) = b_3$, $f(a_4) = b_4$ y $f(a_5) = b_5$. Entonces la función inversa de f, f^{-1} será: $f^{-1} : B \to A$ talque $f(b_1) = a_1$, $f(b_2) = a_2$, $f(b_3) = a_3$, $f(b_4) = a_4$ y $f(b_5) = a_5$.

Notemos que si componemos f con f^{-1} dejamos todos los elementos del dominio de f igual, pues si $f : A \to B$ y $f^{-1} : B \to A$ entonces $f^{-1} \circ f : A \to A$ y corresponderá a cada elemento consigo mismo, a la función que hace ésto la conocemos como *Identidad* y la abreviamos como $\mathcal{I}$.

8.1.6. Funciones Crecientes

Son aquellas funciones que tienen como dominio y codominio a $\mathbb{R}$, es decir; $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y que si un elemento del dominio es **mayor** que otro, entonces su imagen será **mayor** que la imagen del otro, es decir:

$$\text{Si } a > b, \text{ entonces } f(a) > f(b)$$

8.1.7. Funciones Decrecientes

Son aquellas funciones que tienen como dominio y codominio a $\mathbb{R}$, es decir; $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y que si un elemento del dominio es **mayor** que otro, entonces su imagen será **menor** que la imagen del otro, es decir:

$$\text{Si } a > b, \text{ entonces } f(a) < f(b)$$

8.1.8. Funciones Pares e Impares

1. **Función Par**

   Las funciones pares son aquellas en que se cumple para todos los elementos del dominio que $f(x) = f(-x)$, es decir:

   $$\forall a \in Dom(f) \to f(a) = f(-a)$$

2. **Función Impar**

   Las funciones impares son aquellas en que se cumple para todos los elementos del dominio que $f(x) = -f(-x)$, es decir:

   $$\forall a \in Dom(f) \to f(a) = -f(-a)$$

8.2. El Plano Cartesiano

El plano cartesiano o sistema de ejes coordenados debe su nombre al matemático francés Rene Descartes[3], es utilizado principalmente en la Geometría Analítica[4], pero nosotros lo ocuparemos para estudiar las funciones por medio de sus gráficos.

El plano cartesiano consta de dos rectas numéricas que se cortan perpendicularmente en el 0 de ambas, a este punto se le conoce como *origen*, la recta horizontal se conoce como *eje de las abscisas* o *eje de las x* y a la recta vertical como *eje de las ordenadas* o *eje de las y*, se divide en cuatro cuadrantes, los cuales son:

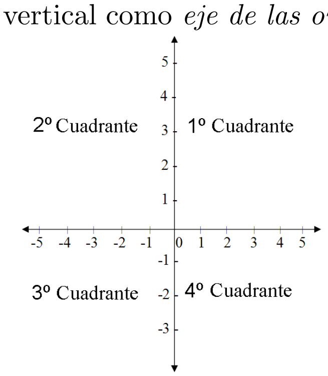


Figura 8.5: El plano cartesiano y sus 4 cuadrantes

[3]Descartes, filósofo y matemático francés, vivió entre los años 1596 y 1650, fué el primero en aplicar el Álgebra a la Geometría, creando así la Geometría Analítica

[4]Rama de la matemática que estudia la geometría desde un punto de vista algebraico

8.2.1. Determinación de un punto por sus coordenadas

Los ejes coordenados nos sirven para determinar cada punto del plano, es decir, cualquier parte del plano que yo escoja ya tiene un nombre si es que en ese plano tengo dibujado un sistema de ejes perpendiculares. El nombre que le es asignado a cada punto viene dado por sus proyecciones sobre los ejes, ambas llamadas *coordenadas*.

Las proyecciones son la imagen del punto sobre los ejes, y estas las encontramos trazando una línea perpendicular al eje y que a traviese al punto en cuestión, el lugar donde esta recta se intersecta con el eje será la coordenada del punto respecto al eje que se proyectó.

La manera de escribir los nombres de los puntos del plano es formando un conjunto llamado *par ordenado*, este conjunto esta formado por dos elementos que tienen una posición prefijada, es decir, su posición es única e inalterable, se denota de la forma (a, b) donde la primera componente sera la coordenada del punto en cuestión sobre el eje de las abscisas y la segunda componente será la coordenada sobre el eje de las ordenadas.

Dos pares ordenados serán iguales si cada una de sus componentes son respectivamente iguales, es decir:

$$(a, b) = (c, d) \Longleftrightarrow a = c \text{ y } b = d$$

♠ Por ejemplo:

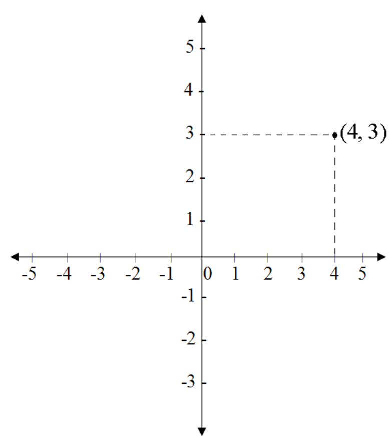


Figura 8.6: Ubicación del punto (4,3) en el plano cartesiano

♢ Observa que ...

† *Las coordenadas del origen son* $(0, 0)$.

† *La abscisa de cualquier punto situado en el eje de las* y *es* 0.

† *La ordenada de cualquier punto situado en el eje de las* x *es* 0.

† *Los signos de las coordenadas de un punto dependen del cuadrante en el que se posicione.*

	Signo de la abscisa	*Signo de la ordenada*
Si está en el 1^{er} *cuadrante*	$+$	$+$
Si está en el 2^{do} *cuadrante*	$-$	$+$
Si está en el 3^{er} *cuadrante*	$-$	$-$
Si está en el 4^{to} *cuadrante*	$+$	$-$

8.2.2. Representación gráfica de las funciones

Las funciones que estudiaremos son únicamente funciones donde su dominio y su codominio son el conjunto de los números reales, o simplemente $\mathbb{R}$, y en un sistema de ejes coordenados se hace presente este conjunto en ambas rectas que lo componen, es por esto que se utilizan sus ejes como el dominio y el codominio de las funciones ya que de esta manera apreciamos una buena representación de ellas.

El eje de las abscisas se utiliza para representar a las preimágenes (por lo tanto el eje de las x sería el dominio de la función), y el eje de las ordenadas se utiliza para representar a las imágenes (por lo tanto el eje de las y sería el codominio de la función).

Las "reglas" que discriminan lo que hacen las funciones que estudiaremos serán dadas siempre por ecuaciones de dos incógnitas donde la incógnita x será la preimagen y que ahora llamaremos *variable independiente* y la incógnita y será la imagen y que llamaremos *variable dependiente* pues depende del valor de x.

De esta manera podemos decir que $f(x) = y$.

8.3. Algunas Funciones Importantes

Existe una infinita cantidad de funciones distintas, pero algunas de ellas, las que te preguntarán en la PSU, las podemos clasificar de las siguientes maneras :

8.3.1. Función Lineal

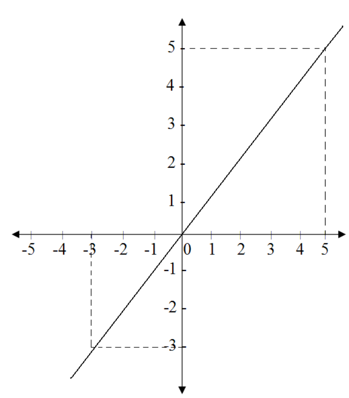
Las funciones lineales son todas aquellas que están determinadas por una ecuación de primer grado de la forma:

$$y = f(x) = mx \qquad \text{con } m \text{ constante}$$

Se conoce a m como constante de de proporcionalidad debido a que la función lineal relaciona a x y a y de manera proporcional[5], pero principalmente desde el punto de vista de funciones llamaremos a m **pendiente**, pues al ver representada gráficamente la función lineal, m sera la que determine la inclinación de la gráfica.

♠ Grafiquemos la función $y = x$ donde $m = 1$; para hacerlo debemos dar valores a x, para obtener valores para y, luego ubicaremos estos puntos en el plano cartesiano y los uniremos:

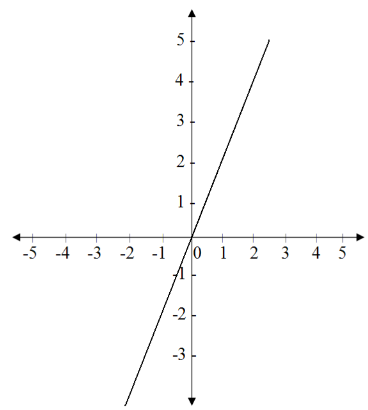
x	y
-3	-3
-1	-1
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
⋮	⋮



[5] Ver página 27

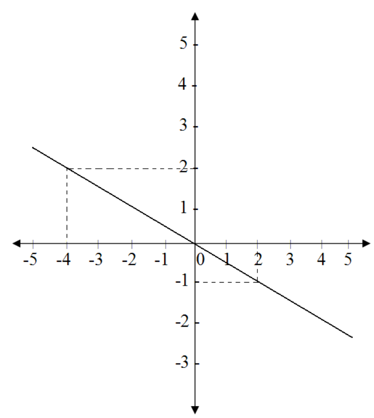
♠ Grafiquemos la función $y = 2x$ donde $m = 2$; para hacerlo debemos dar valores a x, para obtener valores para y, luego ubicaremos estos puntos en el plano cartesiano y los uniremos:

x	y
-2	-4
-1	-2
0	0
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
$\vdots$	$\vdots$



♠ Grafiquemos la función $y = -\frac{1}{2}x$ donde $m = -\frac{1}{2}$; De la misma manera aterior le daremos valores a x, para obtener valores para y:

x	y
-4	2
-2	1
0	0
1	-0,5
2	-1
4	-2
5	-2,5
6	-3
$\vdots$	$\vdots$



Como puedes darte cuenta en las diferencias entre los gráficos anteriores, lo único que cambia es la pendiente m, lo que significa que ésta determina por completo la forma del gráfico. Por lo tanto nos lleva a concluir:

† Si m es positivo entonces el gráfico de la función pasará entre el 3^{er} y el 1^{er} cuadrante, es decir, será un función creciente.

† Si m es negativo entonces el gráfico de la función pasará entre el 2^{do} y el 4^{to} cuadrante, es decir, será una función decreciente.

† Si m_1 es mayor que m_2 entonces el gráfico de la función $y = m_1x$ será "mas inclinado" que el gráfico de la función $y = m_2x$, en este caso se dice que la primera función tiene una mayor pendiente.

8.3.2. Función Afín y la Recta

La Función Afín

Una función afín es aquella que está determinada por una ecuación de primer grado de la forma:

$$y = f(x) = mx + n \qquad \text{con } m \text{ y } n \text{ constantes}$$

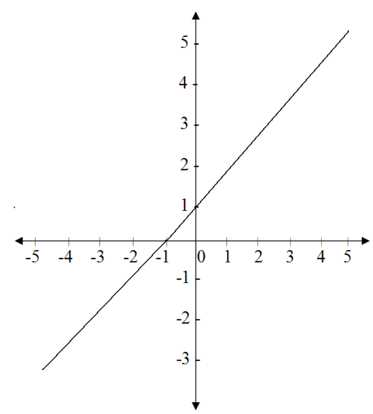
La ecuación de una función afín es conocida como ecuación de la recta, precisamente porque las gráficas de todas las funciones de ésta forma son precisamente lineas rectas.

$\diamondsuit$ **Observa que...**

Las funciones lineales son un caso particular de las funciones afines, pues si en una función afín de la forma $y = mx + n$ se tiene que $n = 0$, tendremos entonces la ecuación de una función lineal.

♠ Grafiquemos la función $y = x + 1$; debemos dar valores a x, para calcular los valores de y para poder graficar.

x	y
-4	-3
-2	-1
0	1
1	2
2	3
4	5
6	7
7	8
$\vdots$	$\vdots$



Notemos que la inclinación es la misma que la de la función $y = x$, pues tiene la misma pendiente.

La Recta

Una Recta es la representación gráfica de una función afín. Si un punto del plano (x, y) pertenece a la recta, diremos entonces que ese punto satisface la ecuación de la recta.

Existen básicamente dos formas de presentar la ecuación de la recta:

† La forma General:

$$ax + by + c = 0$$

† La forma Principal:

$$y = mx + n$$

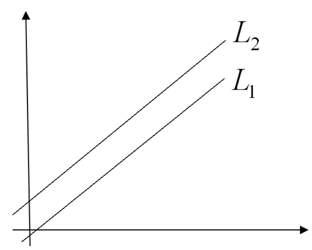
La diferencia principal que existe con la ecuación de una función lineal es que aparece el coeficiente n, conocido como *coeficiente de posición* o simplemente *intercepto*, su nombre es debido a que nos indica la posición de la recta en el plano a través del lugar que corta el eje de las ordenadas[6], mientras que la pendiente m nos dice la inclinación de la recta.

Así, de la ecuación $y = x + 5$ podemos deducir que estará inclinada en 45°, pues $m = 1$, y cortará el eje y en el punto (0, 5).

Relación entre rectas

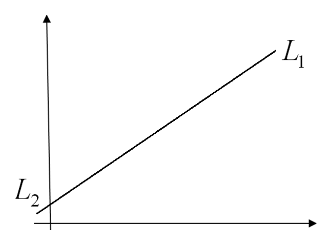
1. **Rectas Paralelas**

Dos rectas se dicen paralelas si ambas tienen igual pendiente, pero distinto coeficiente de posición, es decir; sean $L_1 : y = m_1x + n_1$ y $L_2 : y = m_2x + n_2$, entonces $L_1 // L_2$ si y solo si $m_1 = m_2$ y $n_1 \neq n_2$.



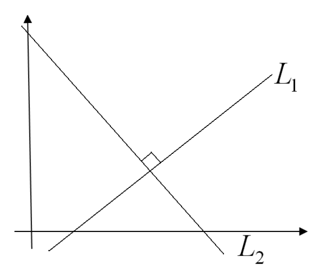
2. **Rectas Coincidentes**

Dos rectas se dicen coincidentes si ambas tienen igual pendiente, e igual coeficiente de posición, es decir; sean $L_1 : y = m_1x + n_1$ y $L_2 : y = m_2x + n_2$, entonces L_1 es coincidente con L_2 si y solo si $m_1 = m_2$ y $n_1 = n_2$.



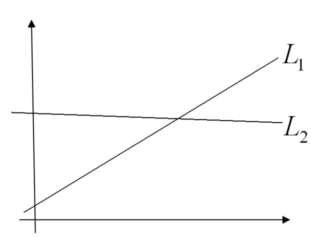
3. **Rectas Perpendiculares**

Dos rectas se dicen perpendiculares si el producto entre las pendientes de ambas es -1, es decir; sean $L_1 : y = m_1x + n_1$ y $L_2 : y = m_2x + n_2$, entonces $L_1 \perp L_2$ si y solo si $m_1 \cdot m_2 = -1$.



4. **Rectas Secantes**

Dos rectas son secantes si entre ellas no son paralelas, perpendiculares ni coincidentes, solo se cruzan.



[6] Esto es debido a que si reemplazamo $x = 0$ en la ecuación $y = mx + n$, nos da por resultado $y = n$ lo que implica que el punto $(0, n)$ pertenece a la recta

♣ **Actividad 8.1.**

Determina si las siguientes rectas son paralelas (//), coincidentes, perpendiculares ($\perp$) o secantes :

1. $L_1 : y = x$ y $L_2 : y = 2x + 1$
2. $L_1 : y = x + 1$ y $L_2 : y = x + 2$
3. $L_1 : y = 2x + 5$ y $L_2 : y = -\frac{1}{2}x$
4. $L_1 : y = -x$ y $L_2 : y = x$
5. $L_1 : 2y = 10x + 4$ y $L_2 : y = 5x + 2$
6. $L_1 : y = -5x + 6$ y $L_2 : y = 3x + 2$
7. $L_1 : y = \frac{1}{3}x + 2$ y $L_2 : y = 3x - 2$
8. $L_1 : y = 6x + 1$ y $L_2 : y = -6x + 1$
9. $L_1 : 9y = 6x + 1$ y $L_2 : y = \frac{2}{3} - 2$
10. $L_1 : y = -3x - 8$ y $L_2 : y = +5x - 8$

Determinación de la Ecuación de la Recta

Para determinar la ecuación de una recta basta conocer dos puntos que pertenezcan a ella.

Supongamos que conocemos 2 puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) que pertenecen a la recta $L : y = mx + n$, entonces ambos puntos, por el hecho de pertenecer a la recta, deben satisfacer su ecuación, así tenemos:

$$\left.\begin{array}{rcl} mx_1 + n & = & y_1 \\ mx_2 + n & = & y_2 \end{array}\right|$$

Hemos formado un sistema de ecuaciones, ocupando el método de reducción[7], podemos restar ambas ecuaciones:

$$\begin{array}{rrcl} & mx_1 + n & = & y_1 \\ - & mx_2 + n & = & y_2 \\ \hline \multicolumn{2}{r}{mx_1 - mx_2 + 0} & = & y_1 - y_2 \\ \multicolumn{2}{r}{\Rightarrow m(x_1 - x_2)} & = & y_1 - y_2 \end{array}$$

Y al dividir por $(x_1 - x_2)$, se tiene la fórmula para encontrar la pendiente de una recta:

$$\Rightarrow m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

Luego, para encontrar el intercepto reemplazamos en cualquiera de las ecuaciones originales del sistema y de ésta manera determinamos la ecuación de una recta.

♠ Ejemplo 1

Determinemos la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A = (2, 3)$ y $B = (3, 4)$:

[7] Ver página 68

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \\
&= \frac{4-3}{3-2} \\
&= \frac{1}{1} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

Luego sabemos que:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= mx_1 + n \\
\Rightarrow \quad 3 &= 1 \cdot 2 + n \\
3 - 2 &= n \\
\Rightarrow \quad n &= 1
\end{aligned}
$$

Por lo tanto tenemos que la ecuación buscada es:

$$y = x + 1$$

♠ Ejemplo 2

Determinemos la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A = (-1, 5)$ y $B = (3, 1)$:

$$
\begin{aligned}
m &= \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \\
&= \frac{1-5}{3-(-1)} \\
&= \frac{-4}{4} \\
&= -1
\end{aligned}
$$

Luego sabemos que:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= mx_1 + n \\
\Rightarrow \quad 1 &= -1 \cdot 3 + n \\
1 + 3 &= n \\
\Rightarrow \quad n &= 4
\end{aligned}
$$

Por lo tanto tenemos que la ecuación buscada es:

$$y = -x + 4$$

♣ *Actividad 8.2.*

I. *Representa gráficamente las siguientes funciones*

1.	$y = -2x$	*5.*	$y = 3x + 3$	*9.*	$y = \frac{5x}{4}$	*13.*	$x + y = 0$
2.	$y = x + 2$	*6.*	$y = 2x - 4$	*10.*	$3y + 9x - 3 = 0$	*14.*	$5x - y = 2$
3.	$y - x - 3$	*7.*	$y = -2x + 4$	*11.*	$\frac{y}{5} = 2x + 5$	*15.*	$3y = 4x + 5$
4.	$y = x + 3$	*8.*	$y = \frac{5x-4}{2}$	*12.*	$y = 8 - 3x$	*16.*	$x = 6y - 1$

II. *Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos:*

1.	$(1,2)$ y $(3,4)$	*5.*	$(a,2a)$ y $(3a,a)$	*9.*	$(0,5)$ y $(0,16)$
2.	$(0,0)$ y $(1,1)$	*6.*	$(\frac{3}{2},5)$ y $(1,2)$	*10.*	$(5,9)$ y $(9,9)$
3.	$(1,-8)$ y $(5,3)$	*7.*	$(9,8)$ y $(-9,6)$	*11.*	$(6,6)$ y $(-5,5)$
4.	$(0,5)$ y $(3,4)$	*8.*	$(-25,3)$ y $(2,0)$	*12.*	$(-96,\frac{5}{6})$ y $(6,3)$

8.3.3. Un Poco de Geometría Analítica

Intersección Entre Rectas

Con las herramientas que ya disponemos nos será muy fácil encontrar la intersección entre dos rectas pues éste punto debe pertenecer a ambas rectas, por lo tanto debe cumplir con sus respectivas ecuaciones, de manera que si queremos encontrar el punto de intersección entre dos rectas debemos resolver el sistema que forman las ecuaciones de ambas rectas.

♠ Ejemplo:

Determinar el par ordenado donde se intersectan las rectas $L_1 : y = 2x + 3$ y $L_2 : 5y = 6x + 1$.

Respuesta:

Debemos resolver el sistema formado por éstas dos ecuaciones, de manera que:

$$\left.\begin{array}{rcl} y & = & 2x+3 \\ 5y & = & 6x+1 \end{array}\right| \cdot -3 \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{rcl} -3y & = & -6x-9 \\ 5y & = & 6x+1 \end{array}\right|$$

Ahora sumamos las nuevas ecuaciones:

$$\begin{array}{crcl} & -3y & = & -6x-9 \\ + & 5y & = & 6x+1 \\ \hline & 2y & = & 0-8 \end{array}$$

$$\Rightarrow y = -4$$

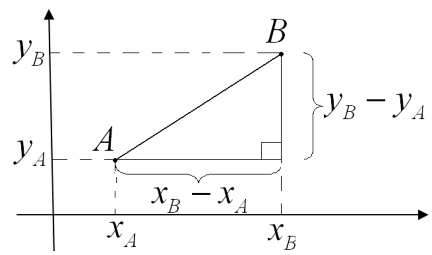
Y con el valor de y determinamos x reemplazando en cualquiera de las ecuaciones originales,

$$\begin{aligned} y &= 2x+3 \\ (-4) &= 2x+3 \\ -7 &= 2x \\ \Rightarrow x &= -\frac{7}{2} \end{aligned}$$

Entonces el punto de intersección entre las rectas será $(-\frac{7}{2}, -4)$

Distancia Entre dos Puntos

Para encontrar la distancia entre dos puntos utilizamos sus coordenadas cartesianas para formar un triángulo rectángulo, donde la hipotenusa representa las distancia entre los puntos y sus catetos los encontramos con la diferencia entre las coordenas x y las y de los puntos en cuestión, como lo indica la figura:



De manera que la distancia (d) entre A y B será determinada por el teorema de Pitágoras de la forma:

$$d^2 = (y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2$$

$$\Rightarrow \boxed{d = \sqrt{(y_B - y_A)^2 + (x_B - x_A)^2}}$$

♠ Ejemplo:

Determinar la distancia entre los puntos (4,2) y (1,6):

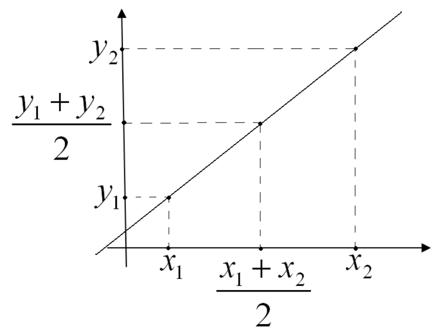
Respuesta:

Reemplazamos los valores en la fórmula de manera que:

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(6-2)^2 + (1-4)^2} \\ d &= \sqrt{(4)^2 + (-3)^2} \\ d &= \sqrt{16+9} = \sqrt{25} \\ d &= 5 \end{aligned}$$

Punto Medio

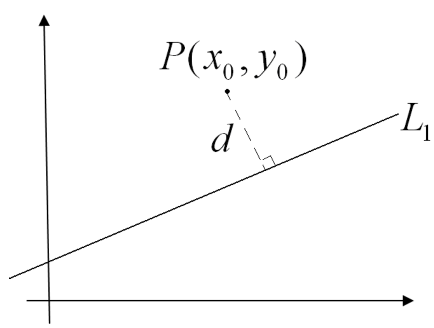
Sean dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) en el plano, entonces el punto medio del segmento que une a dichos puntos queda determinado por:



Punto medio $=(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$.

Distancia entre un Punto y una Recta

Sea el punto $P(x_0, y_0)$ y la recta $L_1 : ax + by + c = 0$, entonces la distancia entre P y L_1 ($d(P, L_1)$) está determinada por:



$$d(P, L_1) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

8.3.4. Función Cuadrática y la Parábola

Las funciones cuadráticas son todas aquellas que están determinadas por una ecuación de segundo grado, de la forma:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

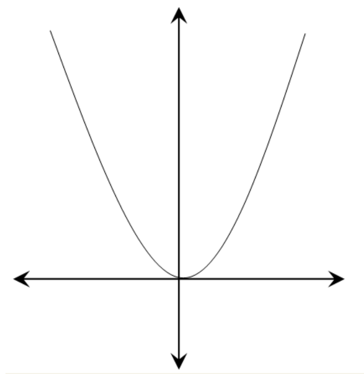
Con a, b y $c \in \mathbb{R}$, y por supuesto con $a \neq 0$, de lo contrario estaríamos en presencia de una función afín. La representación gráfica de una función cuadrática se denomina **parábola**.

Características de la parábola

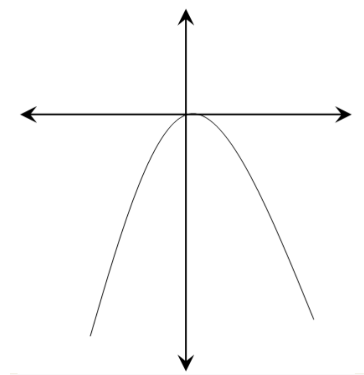
La forma de la parábola está totalmente determinada por los coeficientes de la función cuadrática a, b y c.

El coeficiente a, que acompaña al x^2, determinara si las ramas de la parábola van hacia arriba o hacia abajo, es decir:

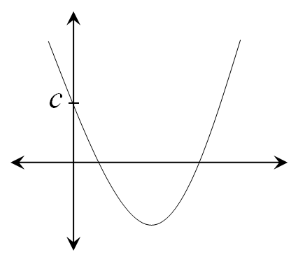
Si $a > 0$, la parábola estará contenta



Si $a < 0$, la parábola estará triste



El coeficiente c , el que no tiene x, cumple la misma labor que n en la función afín, es conocido como intercepto, pues es el valor por donde la parábola atraviesa el eje y, es decir:



Los lugares por donde la parábola atravesará el eje de las abscisas o eje x, serán los puntos donde la función sea 0, pues recordemos que los puntos sobre el eje x tienen coordenada y igual a cero, por lo tanto debemos encontrar que valores de x cumplen que:

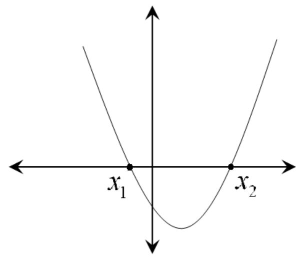
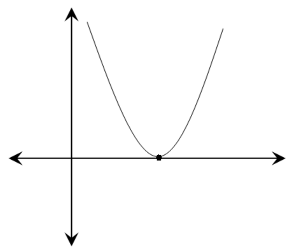
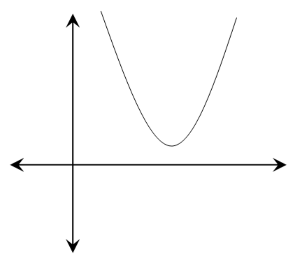
$$f(x) = 0$$

O lo que es igual:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Y esos valores de x son precisamente las raices de la ecuación de segundo grado que determina a la función. Sin embargo éstas raices no siempre existen, o a veces solo existe una, en el primer caso la parábola nunca corta el eje x, y en el segundo lo toca una sola vez. Recordemos que la cantidad de raices de una ecuación de segundo grado viene dado por su discriminante[8], por lo tanto se tiene que:

[8] Ver sección 5.3.3

Si $\Delta > 0$, la ecuación tendrá dos raices, es decir, corta dosveces el eje x precisamente por las dos soluciones de la ecuación.	
Si $\Delta = 0$, la ecuación tendrá una raíz, es decir, toca una sola vez al eje x sobre la única solución de la ecuación.	
Si $\Delta < 0$, la ecuación no tendrá raices, por lo tanto no toca nunca al eje x.	

Otra parte importante de la parábola es el punto donde cambia de dirección, conocido como *vértice*, para encontralo podemos aprovechar el hecho de que la parábola es simétrica, por lo tanto podemos encontrar la componente x del vértice (llamémosla x_v) fácilmente ya que ésta está justo entre las raíces de la ecuación cuadrática. Por lo tanto podemos encontrarla promediando las raices:

$$\begin{aligned} x_v &= \frac{x_1 + x_2}{2} \\ &= \frac{(-\frac{b}{a})}{2} \\ \Rightarrow \quad x_v &= -\frac{b}{2a} \end{aligned}$$

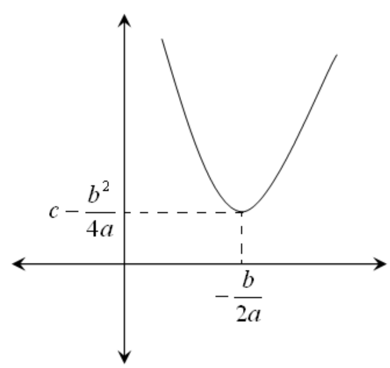
Luego para encontrar la componente y del vértice (llamémosla y_v) reemplazamos x_v en la función:

$$\begin{aligned} y_v &= f(x_v) \\ &= a{x_v}^2 + bx_v + c \\ &= a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c \\ &= a\left(\frac{b^2}{4a^2}\right) - \frac{b^2}{2a} + c \\ &= \frac{b^2}{4a} - \frac{2b^2}{4a} + c \\ &= \frac{b^2 - 2b^2}{4a} + c \\ \Rightarrow \quad y_v &= c - \frac{b^2}{4a} \end{aligned}$$

Así, las coordenadas del vértice de una parábola de ecuación $f(x) = ax^2 + bx + c$ serán:

$$(x_v, y_v) = \left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

lo que se vería gráficamente:



◇ ***Observa que...***

† *Si $b = 0$, el eje y es el eje de simetría de la parábola.*

† *Si $a > 0$ y $b > 0$, el vértice de la la parábola se encontrará a la izquierda del eje y, pues $-\frac{b}{2a} < 0$.*

† *Si $a > 0$ y $b < 0$, el vértice de la la parábola se encontrará a la derecha del eje y., pues $-\frac{b}{2a} > 0$.*

† *Si $a < 0$ y $b < 0$, el vértice de la la parábola se encontrará a la izquierda del eje y., pues $-\frac{b}{2a} < 0$.*

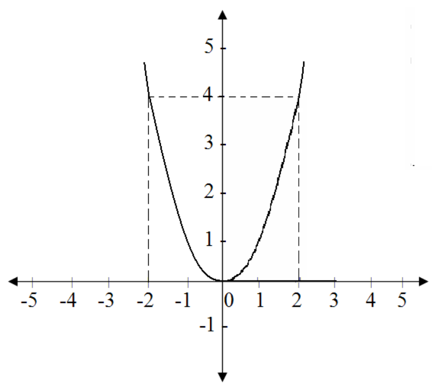
† *Si $a < 0$ y $b > 0$, el vértice de la la parábola se encontrará a la derecha del eje y., pues $-\frac{b}{2a} > 0$.*

Ejemplos de funciones cuadráticas :

♠ Ejemplo 1

Grafiquemos la función $y = x^2$; debemos dar valores a x, para calcular los valores de y para poder ubicarlos en el plano cartesiano.

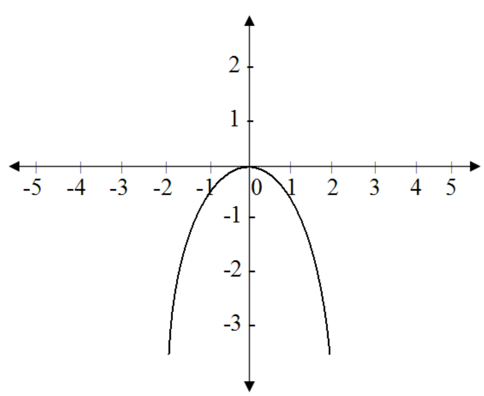
x	y
-4	16
-3	9
-2	4
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16
⋮	⋮



♠ Ejemplo 2

Grafiquemos la función $y = -x^2$; de la misma manera debemos asignar arbitrariamente valores convenientes de x para encontrar los correspondientes de y y luego graficarlos en el plano cartesiano:

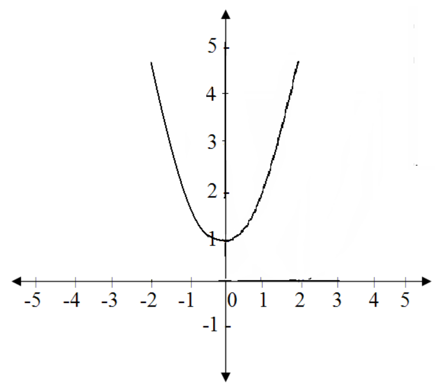
x	y
-4	-16
-3	-9
-2	-4
0	0
1	-1
2	-4
3	-9
4	-16
⋮	⋮



♠ Ejemplo 3

Grafiquemos la función $y = x^2 + 1$;

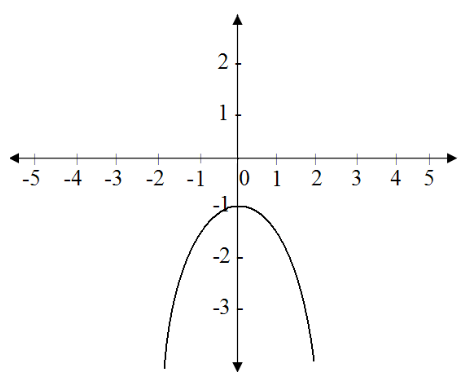
x	y
-4	17
-3	10
-2	5
0	1
1	2
2	5
3	10
4	17
$\vdots$	$\vdots$



♠ Ejemplo 4

Grafiquemos la función $y = -x^2 - 1$;

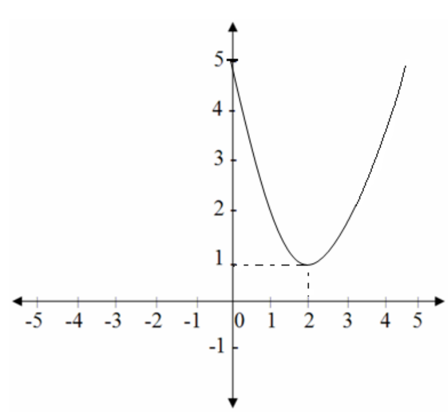
x	y
-4	-17
-3	-10
-2	-5
0	-1
1	-2
2	-5
3	-10
4	-17
$\vdots$	$\vdots$



♠ Ejemplo 5

Grafiquemos la función $y = x^2 - 4x + 5$;

x	y
-1	10
0	5
1	2
2	1
3	2
4	5
5	10
6	17
$\vdots$	$\vdots$



♣ *Actividad 8.3.*

Representa gráficamente las siguientes funciones, determinando la concavidad, el intercepto con el eje y ,el vertice y los cortes sobre el eje x.

1. $f(x) = x^2 + 3x - 4$	4. $f(x) = x^2 + 2x - 8$	7. $f(x) = x^2 - 8x + 16$
2. $f(x) = x^2 + 3x + 2$	5. $f(x) = x^2 - 2x - 8$	8. $f(x) = x^2 + 4x + 4$
3. $f(x) = x^2 - 5x + 6$	6. $f(x) = x^2 - 9$	9. $f(x) = 2x^2 - 9x + 7$

8.3.5. Función Valor Absoluto

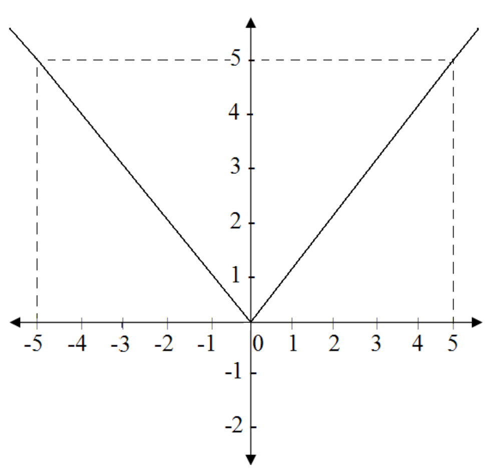
La función valor absoluto (se abrevia utilizando el signo $|x|$ y se lee "valor absoluto de x"), es aquella que a cada número real le asigna su mismo valor pero sin considerar su signo, de esta manera al 1 lo lleva al 1, al 5 lo lleva al 5, pero al número -3 lo llevará al 3 y al -100 lo llevará al 100. Dicho de otra manera, a todos los números positivos más el 0 los deja igual, y a los negativos les cambia el signo.

Dicho matemáticamente:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{Si } x \geq 0 \\ -x & \text{Si } x < 0 \end{cases}$$

Representemos gráficamente esta función, para hacerlo, demosle valores a x y asignémosle los valores correspondientes de y.

x	$\lvert x \rvert$
-5	5
-4	4
-3	3
-2	2
0	0
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
$\vdots$	$\vdots$



Esta función no es inyectiva, ya que por ejemplo al número 5 del recorrido llegan los números 5 y -5 del dominio. Tampoco es sobreyectiva pues todos los valores negativos del codominio quedan sin preimagen.

♣ *Actividad 8.4.*

Representa gráficamente las siguientes funciones:

1. $f(x) = \|x+1\|$	*4.* $f(x) = \|x\| - 2$	*7.* $f(x) = \|2x\|$
2. $f(x) = \|x\| + 1$	*5.* $f(x) = -\|x\|$	*8.* $f(x) = \|x^2\|$
3. $f(x) = \|x-2\|$	*6.* $f(x) = 2\|x\|$	*9.* $f(x) = \|x\|^2$

8.3.6. Función Parte Entera

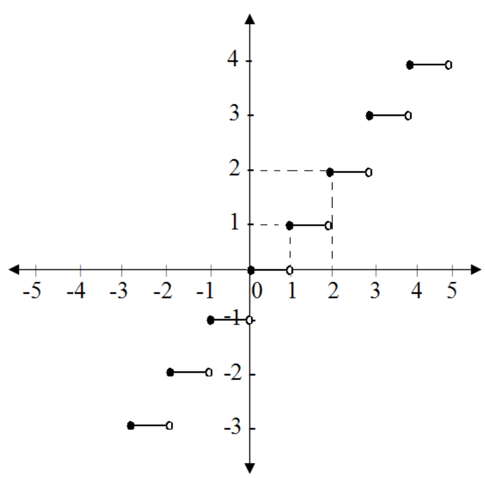
La función parte entera (se abrevia utilizando el signo $\lfloor x \rfloor$ y se lee "la parte entera de x") es una función de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pero su recorrido es $\mathbb{Z}$, y es aquella que a cada número real le asocia el número entero más cercano que éste hacia su izquierda en la recta numérica, de esta manera al 1 lo lleva al 1, pues ese número ya es entero, al 6,8 lo lleva al 6, al 10,3 al 10 y en general a todos los números positivos solo les quita su parte decimal (si es que la tiene), pero éste no es el caso de los números negativos, pues por ejemplo, el entero más cercano a la izquierda de $-4{,}2$ es el número -5 y del $-0{,}2$ es el -1. Es decir:

$$\lfloor x \rfloor = z_x$$

Tal que z_x sea el número entero más grande que cumpla que $z_x \leq x$.

Veamos el gráfico de ésta función:

x	$\lfloor x \rfloor$
-5	-5
-4,5	-5
-3,1	-4
-1,1	-2
$-\frac{1}{2}$	-1
0	0
0,99	0
1	1
2,5	2
3	3
3,5	3
$\vdots$	$\vdots$



♣ *Actividad 8.5.*

Grafica las siguientes funciones:

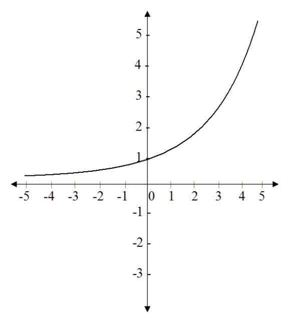
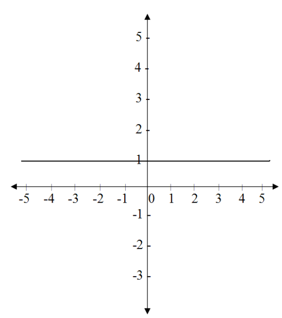
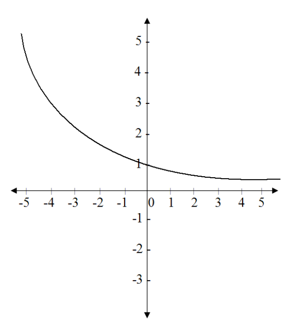
1. $f(x) = \lfloor x \rfloor + 1$	*4.* $f(x) = \lfloor x-3 \rfloor$	*7.* $f(x) = \lfloor 2x+1 \rfloor$
2. $f(x) = \lfloor x+1 \rfloor$	*5.* $f(x) = \lfloor 3x \rfloor$	*8.* $f(x) = 2\lfloor x \rfloor + 1$
3. $f(x) = \lfloor x \rfloor - 3$	*6.* $f(x) = 3\lfloor x \rfloor$	*9.* $f(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor$

8.3.7. Función Exponencial

La función exponencial se define de la forma:

$$f(x) = a^x \qquad \text{con } a > 0$$

También la podemos escribir como $\exp_a(x)$. Es una función inyectiva.
El valor de a determinará por completo la forma de la gráfica de la función.

Si $a > 1$, la función será creciente, pues todo número mayor que uno si se multiplica por sigo mismo aumenta.	
Si $a = 1$, la función será constante, pues 1 elevado a cualquier número real, siempre es 1.	
Si $a \in]0,1[$, la función será decreciente, por ejemplo si $a = \frac{1}{2}$, $a^2 = 1/4$ que es menor que $1/2$.	

♣ *Actividad 8.6.*

Grafica las siguientes funciones exponenciales:

1.	$f(x) = 2^x$	4.	$f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$
2.	$f(x) = 3^x$	5.	$f(x) = (2^x)^2$
3.	$f(x) = 2{,}5^x$	6.	$f(x) = \lfloor 1{,}96 \rfloor^x$

8.3.8. Función Logaritmo

Una función logaritmo es una función definida de la forma:

$$f(x) = \log_a(x) \quad \text{siendo } a \text{ un número fijo, positivo y distinto de 1}$$

Recordemos que los logaritmos NO están definidos para los números negativos[9], por lo que el dominio de ésta función no debe ser $\mathbb{R}$, mas bien, debe ser $\mathbb{R}^+$.

♢ *Observa que ...*

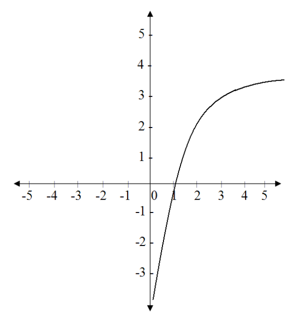
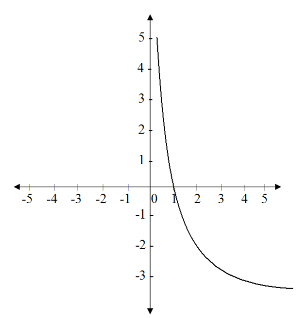
Si consideramos a la función exponencial una función de $\exp_a(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *entonces podemos decir que la función* $\log_a(x) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *es su inversa, pues:*

$$\begin{aligned} \log_a(\exp_a(x)) &= \log_a(a^x) \\ &= x \cdot \log_a a \\ &= x \cdot 1 = x \end{aligned}$$

Su composición genera la identidad.

El gráfico de la función logaritmo va a ser muy distinto según el valor de la base, pues:

[9] ver página 79

Si $a > 1$, la función será creciente, sin embargo a medida que avanza en la recta numérica crece cada vez más "lento".	
Si $a \in]0,1[$, la función será decreciente, sin embargo a medida que avanza en la recta numérica la gráfica decrece más "lento".	

8.4. Mini Ensayo VIII Funciones

1. Si $f(x) = 3^{x+2}$, entonces $f(x+2) - f(x)$ es igual a:

   a) 3^2
   b) 3^4
   c) $72 \cdot 3^x$
   d) 3^{2x+6}
   e) 3^6

2. Sea $f(x) = \frac{4^{2x} - 4^{2x+3}}{63 \cdot 4^x}$, entonces el valor de a para que $f(a) = -4$ es:

   a) -1
   b) $-1/2$
   c) $-1/4$
   d) $-1/8$
   e) 1

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{x-2}{3x+12}$, el dominio y el recorrido de f son respectivamente:

   a) $\mathbb{R} - \{-4\}; \mathbb{R} - \{2\}$
   b) $\mathbb{R} - \{4\}; \mathbb{R} - \{2\}$

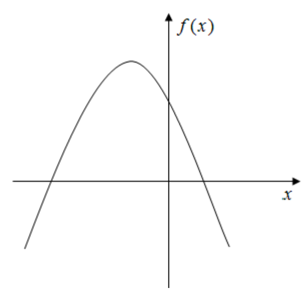
c) $\mathbb{R} - \{-4\}$; $\mathbb{R} - \{1/3\}$
d) $\mathbb{R} - \{4\}$; $\mathbb{R} - \{1/3\}$
e) $\mathbb{R}$; $\mathbb{R}$

4. Si $g(x) = x^2 + 1$ y $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$, entonces $(g \circ f)(x)$ es:

a) 1
b) $\frac{x^2+1}{(x^2+1)^2}$
c) $x^2 + 1$
d) $x^2 - 1$
e) $\frac{x^4+(x^2+1)^2}{(x^2+1)^2}$

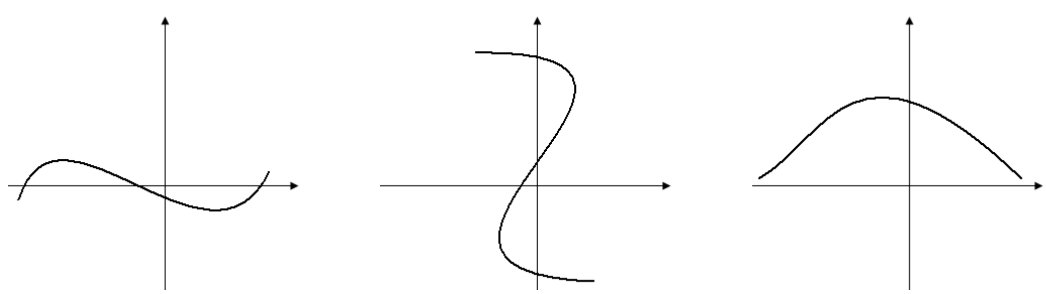
5. La función $f(x) = ax^2 + bx + c$ está graficada en el dibujo adjunto, según ésto, es verdadero que:

a) $a < 0; b < 0; c > 0$
b) $a < 0; b > 0; c > 0$
c) $a > 0; b < 0; c > 0$
d) $a < 0; b > 0; c < 0$
e) $a < 0; b < 0; c < 0$



6. Cuál de los siguientes gráficos representa una función?

I. II. III.



a) Solo II
b) I y III
c) Solo III
d) Solo I
e) Todos

7. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por los puntos (3,5) y (4,8)?

   a) $y + 3x = 2$
   b) $y - 3x = -4$
   c) $y - 3x = 1$
   d) $3y - x = 2$
   e) $y + x = 1$

8. Si $f(x) = x^2 - 3$ y $h(z) = z + 4$, entonces el valor de $3f(-1) + 5h(2)$ es:

   a) 24
   b) 36
   c) -6
   d) 30
   e) No se puede calcular.

9. ¿Para que valor de k, la parábola $f(x) = 2x^2 + 3x + k$ no intersecta el eje de las abscisas?

   a) Para ningún valor de k
   b) $k > 0$
   c) $k > \frac{8}{9}$
   d) $k > -1$
   e) $k > \frac{9}{8}$

10. Cual debe ser el valor de p en la ecuación de la recta $L_1 : px + (p+1)y = 18$, para que sea paralela a la recta L_2 cuya ecuación es $4x + 3y + 7 = 0$

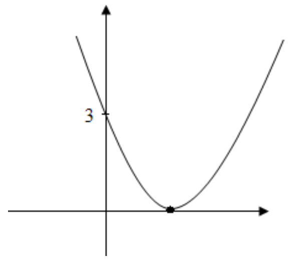
   a) 4
   b) 0,75
   c) -4
   d) 0,25
   e) $-4/3$

11. Si $h(x) = x^2 - 4$, $t(x) = x - 6$ y $p(x) = \frac{t(x)}{h(x)}$, entonces $p(-2)$ es:

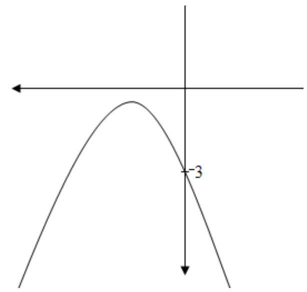
   a) -1
   b) 0
   c) 1
   d) 8
   e) $-2 \notin Dom(p)$

12. A la función $f(x) = -x^2 - 3x - 3$ le corresponde el gráfico:

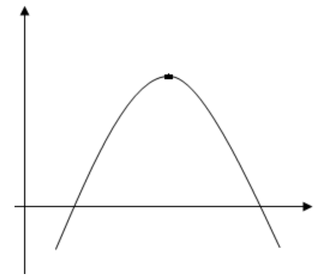
a)



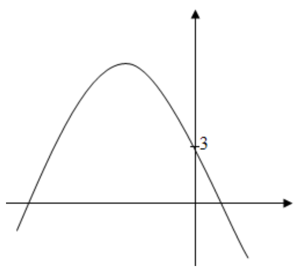
b)



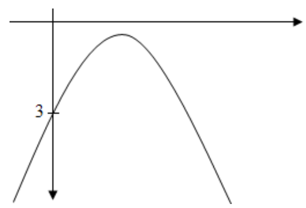
c)



d)



e)



13. Sean las rectas $L_1 : y = x+1$ y $L_2 : y = 2x-1$, entonces cual de las siguientes afirmaciones es verdadera:

    I. L_1 y L_2 son paralelas
    II. L_1 y L_2 son perpendiculares
    III. L_1 y L_2 se intersectan en el punto (2,3)
    IV. L_1 y L_2 son secantes

    a) Solo I
    b) II y III
    c) III y IV
    d) Solo IV
    e) Solo III

14. ¿Cuál de los siguientes puntos NO pertenece al gráfico de la función $h(x) = 1 - x^2$

    a) (0,1)
    b) (1,0)
    c) $(-1, 0)$
    d) $(\sqrt{2}, -1)$
    e) (1,1)

15. El vértice de la parábola $y = -3x^2$ es:

    a) (0,3)

b) (0,0)
c) $(0, -3)$
d) $(-3, 0)$
e) (3,0)

16. ¿Cuál debe ser el valor de t para que el gráfico de la parábola $y = 7x^2 - 4x + 2t - 10$ pase por el origen?

a) 10
b) 5
c) 0
d) -5
e) Ninguna de las anteriores.

Capítulo 9

Geometría Plana

La palabra geometría tiene sus raíces en la composición de las palabras "*geo*" que significa tierra, y la palabra "*metrein*" que significa medida, por lo tanto en su significado más literal geometría es "*medida de la tierra*".

La geometría es la rama de la matemática que se ocupa del estudio de figuras geométricas, sus propiedades, y relaciones que cumplen sus distintas partes.

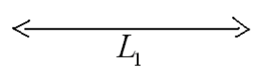
Versión 1.0, Febrero de 2008

9.1. Conceptos Primitivos de la Geometría

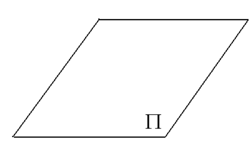
Punto : Según Euclides, un punto es un objeto sin dimensión, es decir, no tiene largo, no tiene angho, ni alto. En la PSU te bastará saber que un punto se representa por letras mayúsculas.

$$\bullet A$$

Recta : Al igual que el punto se dice que una recta es un objeto matemático con una dimensión, solo tiene largo. Generalmente la representamos con una letra L acompañada de un subíndice.



Plano : Su característica es tener dos dimensiones, largo y alto, generalmente se designa con letras griegas mayúsculas, por ejemplo Π, Φ, Θ, etc.



9.1.1. Axiomas Principales de la Geometría Euclidiana

† En todo plano existen infinitos puntos.

† Por un punto pasan infinitas rectas.

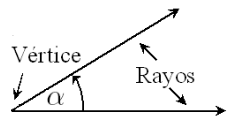
† Por dos puntos pasa sólo una recta.

† Todo plano posee al menos 3 puntos no colineales (no los podemos unir a través de una sola recta).

† Si dos puntos de una recta están en un plano, entonces la recta está en el plano.

9.2. Ángulos

Ángulo: Es la abertura comprendida entre dos rayos, llamados lados que parten de un mismo punto denominado vértice.



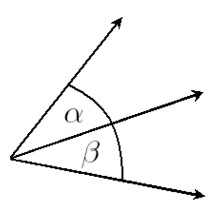
9.2.1. Clasificación de los Ángulos según su medida

Sea α un ángulo cualesquiera.

- Ángulo nulo α=0°
- Ángulo agudo $0° < \alpha < 90°$
- Ángulo recto α=90°
- Ángulo obtuso $90° < \alpha < 180°$
- Ángulo extendido α=180°
- Ángulo completo α=360°

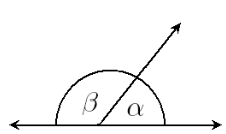
9.2.2. Clasificación de los Ángulos según su posición

Ángulos Consecutivos : Tienen el vértice, origen, y un lado en común.



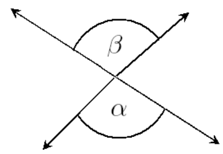
α y β son consecutivos

Ángulos Adyacentes : Tienen el vértice en común y los otros dos lados pertenecen a la misma recta. Los ángulos son suplementarios.



α y β son adyacentes

Ápuestos por el Vértice : Tienen el vértice en común, y los lados de uno son las prolongaciones de los lados del otro. Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.



α y β son opuestos

por el vértice

9.2.3. Clasificación de los ángulos de acuerdo a la suma de sus medidas

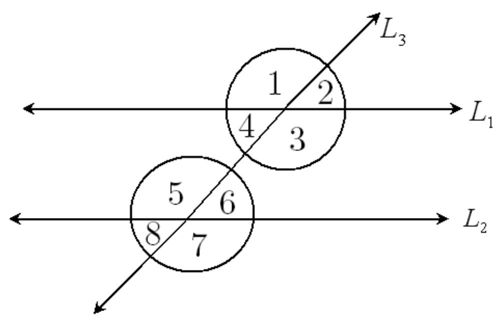
Ángulos Complementarios : Son dos ángulos que sumados dan 90°, si α y β son complementarios, entonces α es el complemento de β y β es el complemento de α.

El complemento de un ángulo cualesquiera x es: $90° - x$.

Ángulos Suplementarios : Son dos ángulos que sumados dan 180°, si α y β son suplementarios, entonces α es el suplemento de β y β es el suplemento de α.

El suplemento de un ángulo cualesquiera x es: $180° - x$.

9.2.4. Ángulos formados por dos paralelas cortadas por una secante o transversal



Ángulos Alternos : Los ángulos alternos entre paralelas tienen la misma medida. Están los ángulos:

- Alternos Internos: $\measuredangle 3 = \measuredangle 5$; $\measuredangle 4 = \measuredangle 6$
- Alternos Externos: $\measuredangle 1 = \measuredangle 7$; $\measuredangle 2 = \measuredangle 8$

Ángulos Correspondientes : Los ángulos correspondientes entre paralelas tienen la misma medida. Estos son:

- $\measuredangle 1 = \measuredangle 5$; $\measuredangle 2 = \measuredangle 6$; $\measuredangle 3 = \measuredangle 7$; $\measuredangle 4 = \measuredangle 8$

Ángulos Colaterales : Los ángulos colaterales entre paralelas suman 180°. Están los ángulos:

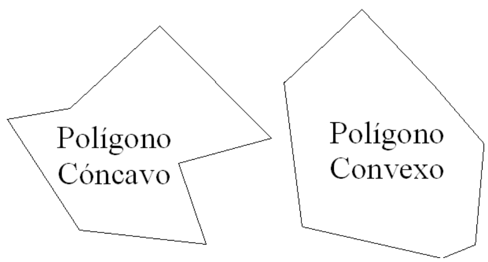
- Colaterales Internos: $\measuredangle 4$ con $\measuredangle 5$; $\measuredangle 3$ con $\measuredangle 6$
- Colaterales Externos: $\measuredangle 1$ con $\measuredangle 8$; $\measuredangle 2$ con $\measuredangle 7$

◇ *Observa que . . .*

- *Bisectriz de un Ángulo: Es el rayo que divide al ángulo, en dos ángulos congruentes (de igual medida).*
- *Rectas Perpendiculares: Son dos rectas que al cortarse forman un ángulo de 90°*

9.3. Polígonos

Se llama polígono a la porción de plano limitada por una curva cerrada, llamada línea poligonal. Existen polígonos cócavos y convexos.



9.3.1. Polígono Regular

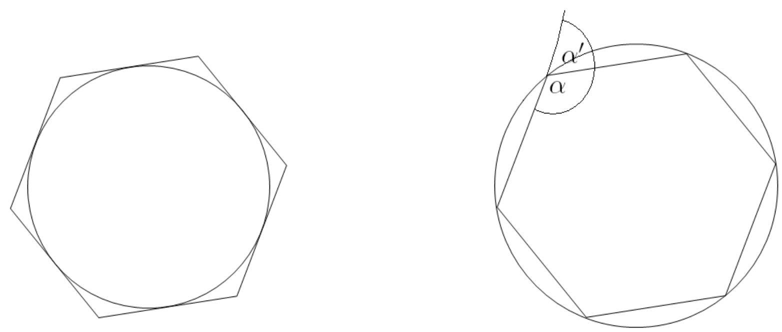
Polígono regular, es aquel que tiene sus lados y sus ángulos respectivamente congruentes.

Nombre de Polígonos

Número de lados	**Nombre**
tres	triángulo
cuatro	cuadrilátero
cinco	pentágono
seis	hexágono
siete	heptágono
ocho	octágono
nueve	eneágono
diez	decágono
once	endecágono
doce	dodecágono
quince	pentadecágono
veinte	icoságono

Propiedades

Sea α ángulo interior.
Sea α' ángulo exterior.
Sea n número de lados.



1. La suma de los ángulos exteriores de cualesquier polígono es $360°$.
2. A todo polígono regular se le puede inscribir una circunferencia (figura izquierda).
3. Todo polígono regular se puede circunscribir en una circunferencia (figura derecha).
4. Diagonales que se pueden trazar desde un vértice: $n-3$.
5. Total de diagonales que se pueden trazar: $\frac{n}{2}(n-3)$.
6. $\alpha = \frac{(n-2)180°}{n}$
7. $\alpha' = \frac{360°}{n}$

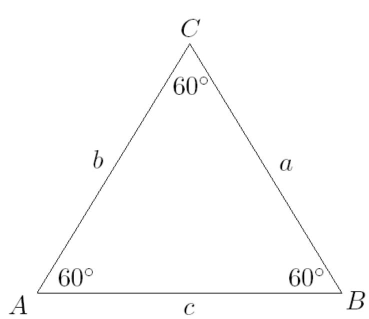
9.4. Triángulos

Triángulo es la porción de plano limitado por tres rectas que se cortan dos a dos.

9.4.1. Clasificación de los Triángulos

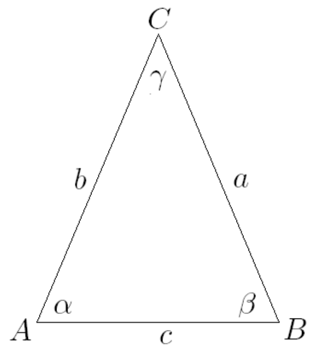
1. **Según sus lados:**

   Triángulo Equilátero : Tienes los tres lados iguales, por ende sus tres ángulos son de igual medida, $60°$ cada uno.



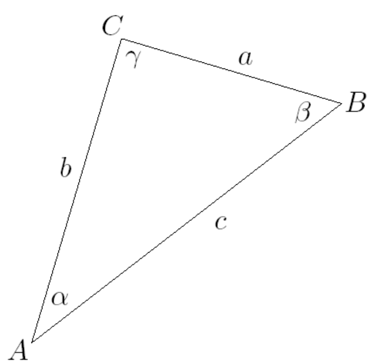
$$a = b = c$$

Triángulo Isósceles : Tiene dos lados iguales y uno distinto al cual se le denomina **base**. Por tener dos lados iguales, tiene dos ángulos iguales ubicados en la base llamados ángulos basales.



$$a = b$$
$$\alpha = \beta$$

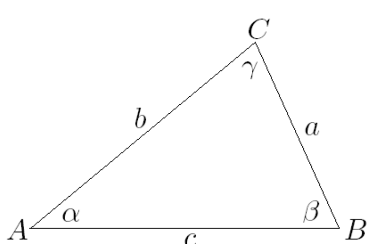
Triángulo Escaleno : Tiene sus tres lados distintos, y por lo tanto sus tres ángulos distintos.



$$a \neq b \neq c$$
$$\alpha \neq \beta \neq \gamma$$

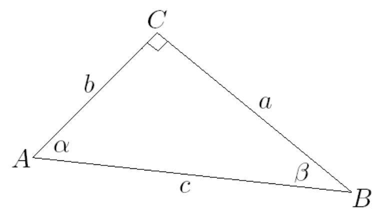
2. Según sus ángulos:

Triángulo Acutángulo : Tiene sus tres ángulos agudos, miden menos 90°. Como todos sus ángulos interiores son agudos, todos sus ángulos exteriores son obtusos.



$$\alpha, \beta \text{ y } \gamma < 90^\circ$$

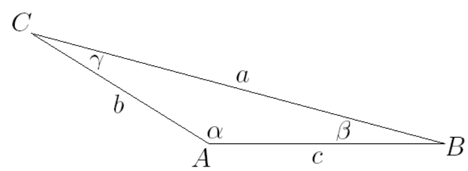
Triángulo Rectángulo : Tiene un ángulo recto. Los otros dos ángulos son agudos y deben sumar 90°. Los lados que forman el ángulo de 90° se llaman **catetos** y el opuesto al ángulo recto se llama **hipotenusa**.



a y b catetos

c hipotenusa

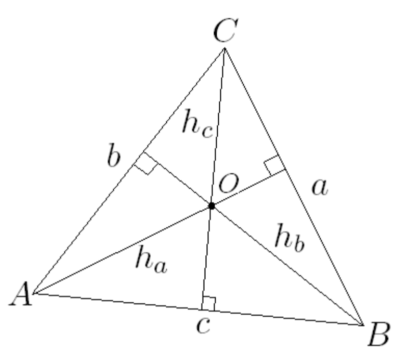
Triángulo Obtusángulo : Tiene un ángulo obtuso, mayor a 90°. Sus otros dos ángulos son agudos.



$\alpha > 90°$

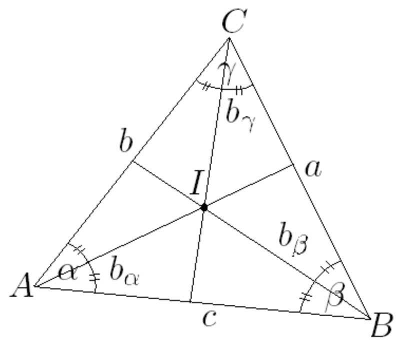
9.4.2. Altura

- Es la perpendicular trazada desde un vértice, al lado opuesto o a su prolongación.
- Hay tres alturas una correspondiente a cada lado.
- Se designan con la letra que indica el lado: h_a, h_b, h_c.
- El punto de concurrencia de las tres alturas se llama **ortocentro**, el punto O.



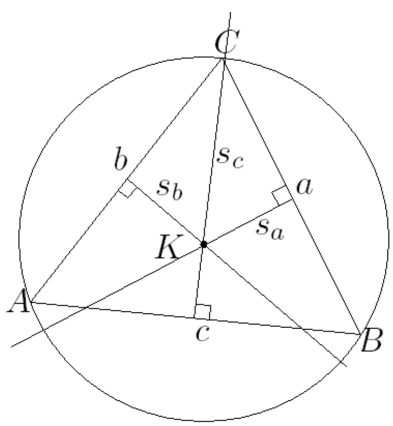
9.4.3. Bisectriz

- Es el rayo que divide al ángulo en dos ángulo de igual medida.
- Hay tres bisectrices, una para cada ángulo.
- Se designan según el ángulo: b_α, b_β, b_γ
- El punto de concurrencia de la tres bisectrices se llama **incentro**, el punto I.



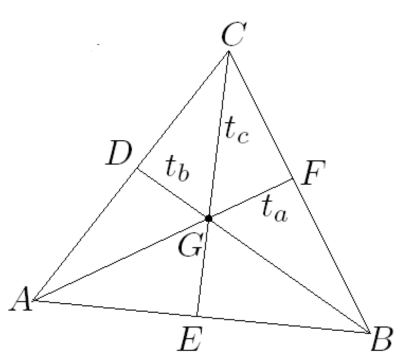
9.4.4. Simetral o Mediatriz

- Es la perpendicular que pasa por el punto medio de cada lado.
- Hay tres simetrales o mediatrices.
- Se designan la letra que indica el lado: S_a ó M_a, S_b ó M_b, S_c ó M_c.
- El punto de intersección de las tres simetrales o mediatrices se llama **circuncentro**, el punto K. Recibe este nombre ya que al inscribir el triángulo en una circuferencia el circuncentro coincide con el centro de ésta.



9.4.5. Transversal de Gravedad

- Es el segmento que une el punto medio de un lado con vértice del lado opuesto.
- Hay tres transversales de gravedad correspondientes a cada lado.
- Se designan con la letra que indica el lado: t_a, t_b, t_c.
- El punto de intersección de la tres medianas se llama **baricentro**, el punto G.



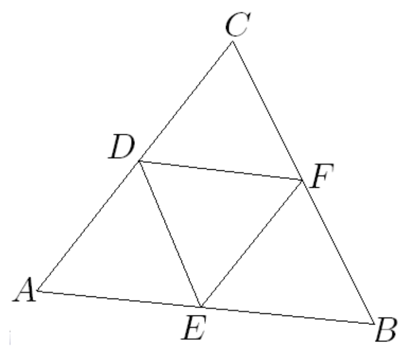
9.4.6. Mediana

- Son los segmentos que unen los puntos medios de dos lados.

- Cada mediana es paralela al lado opuesto y su medida es igual a la mitad de la medida de ese lado.

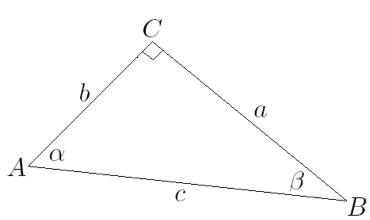
- Se designan: $m_{\overline{ED}}$, $m_{\overline{EF}}$, $m_{\overline{DF}}$.

- Hay tres medianas y estas no concurren (no se intersectan).



9.4.7. Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo se cumple que:
La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.



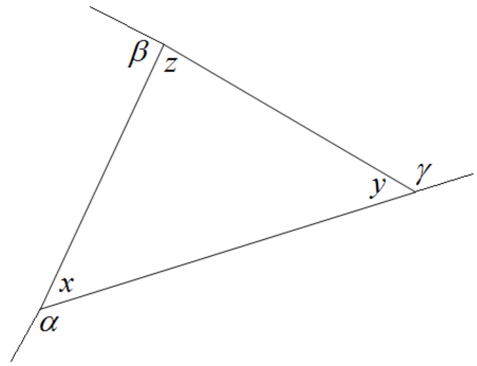
$$a^2 + b^2 = c^2$$

9.5. Mini Ensayo IX
Ángulos y Triángulos

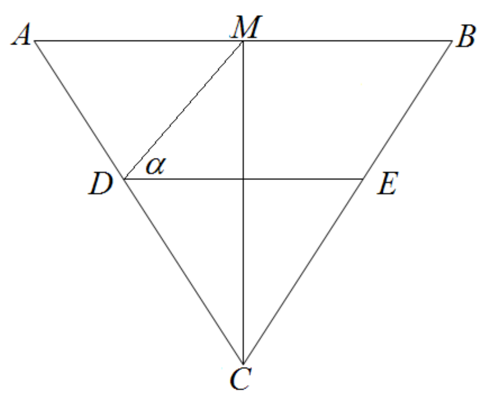
1. Para la figura se cumple que:

I. $\alpha + \beta + \gamma = 2(x + y + z)$
II. $\alpha - z = y$
III. y es suplemento de $(x + z)$

a) I y III
b) II y III
c) I y II
d) Todas
e) Ninguna

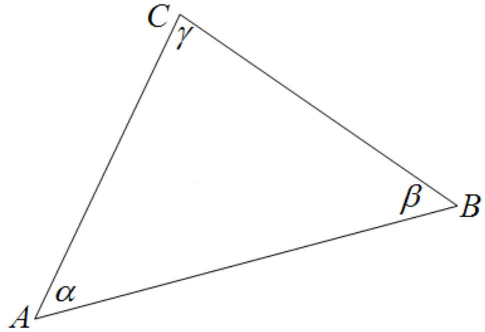


2. En la figura, el $\triangle ABC$ es isóceles de base $\overline{AB}$, $\overline{CM}$ es transversal de gravedad, $\overline{DE}$ es mediana del $\triangle ABC$. Si $\measuredangle MCB = 25°$, entonces $\alpha =$



a) 25°
b) 40°
c) 45°
d) 65°
e) 75°

3. En la figura, $\alpha + \beta = \gamma$ y $\alpha = 2\beta$, entonces los ángulos α, β y γ miden respectivamente:



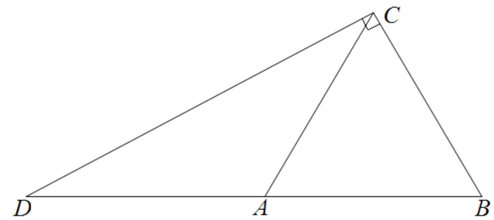
a) $60°; 30°; 90°$
b) $90°; 60°; 30°$
c) $30°; 60°; 90°$
d) $45°; 45°; 90°$
e) $120°; 60°; 180°$

4. En la figura, el $\triangle ABC$ es equilátero y el $\measuredangle DCB$ es recto en C, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

I. $2\overline{AB} = \overline{DA} + \overline{AC}$

II. $\triangle DAC$ es isósceles.

III. $\overline{DC}^2 = \overline{DB}^2 + \overline{BC}^2$



a) I y II

b) I y III

c) II y III

d) I, II y III

e) Ninguna de ellas.

5. Sobre dos rectas paralelas (L_1 y L_2), se han dibujado dos triángulos como se indica en la figura, el $\triangle ABC$ es equilátero y el $\triangle BDE$ es isósceles de base $\overline{BD}$, ¿cuánto mide $\measuredangle x$?

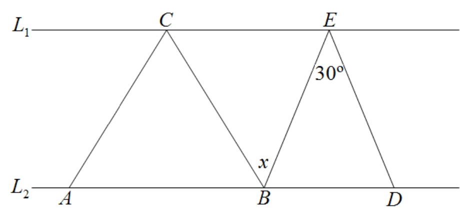
a) 30°

b) 45°

c) 50°

d) 60°

e) 75°

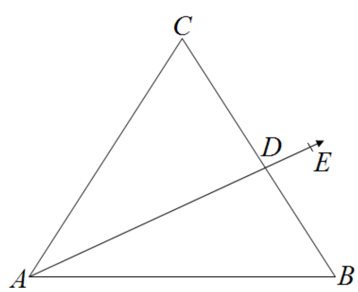


6. En el $\triangle ABC$ de la figura, $\overline{AD}$ es bisectriz del $\measuredangle CAB = 70°$ y $\measuredangle ABC = \measuredangle CAB - 10°$, ¿cuál de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

I. $\measuredangle EDB - 10° = \measuredangle CDE$

II. $\measuredangle CAE + 15° = \measuredangle ACB$

III. $\measuredangle CAB + 10° = \measuredangle ABC$



a) Solo I

b) I y II

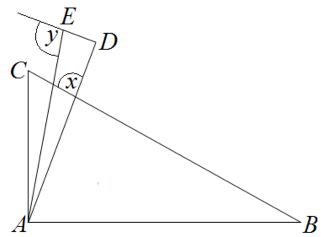
c) I y III

d) II y III

e) I, II y III

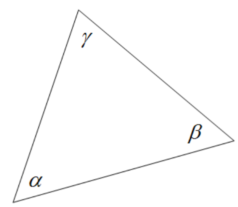
7. El $\triangle ABC$ y el $\triangle ADE$ son rectángulos en A y en D respectivamente, $\measuredangle ABC = 40°$, $\measuredangle BAD : \measuredangle ABC = 2 : 1$ y $\overline{AE}$ es bisectriz del $\measuredangle CAD$, entonces $\measuredangle x + \measuredangle y =$

a) 155°
b) 195°
c) 145°
d) 210°
e) 215°



8. ¿Qué tipo de triángulo es el de la figura si se verifica que $\beta = 2\alpha$ y $\gamma = \alpha + \beta$

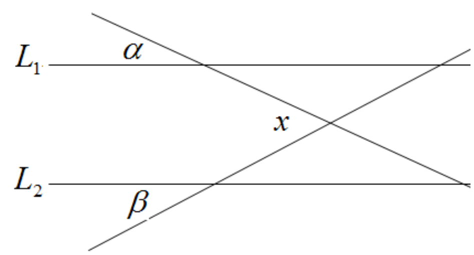
a) Equilátero
b) Isósceles
c) Escaleno
d) Rectángulo
e) c) y d) al mismo tiempo.



9. Si $L_1 /\!/ L_2$. Determinar el ángulo x de la figura.

(1) $\alpha = 60°$
(2) $\beta = 60°$

a) (1) por si sola.
b) (2) por si sola.
c) Ambas juntas (1) y (2)
d) Cada una por si sola (1) ó (2)
e) Se requiere información adicional.



10. Sean $\measuredangle\alpha$, $\measuredangle\beta$ y $\measuredangle\gamma$ los tres ángulos interiores de un triángulo isósceles, si $\measuredangle\alpha = 80°$ y $\measuredangle\beta = 50°$, entonces γ puede ser:

a) 80°
b) 50°
c) 80° o 50°
d) 650°
e) Falta información.

11. ¿Cuánto mide el suplemento de un ángulo a?

(1) El complemento de a es 55°

(2) $a < 90°$

a) (1) por si sola.

b) (2) por si sola.

c) Ambas juntas (1) y (2)

d) Cada una por si sola (1) ó (2)

e) Se requiere información adicional.

9.6. Cuadriláteros

Es un polígono de cuatro lados. Se dividen en paralelógramos, trapecios y trapezoides.

9.6.1. Paralelógramos

Tienen dos pares de lados opuestos paralelos. Se clasifican en:

- **Paralelógramos Rectos**: Sus ángulos interiores son rectos. Estos son:
  - cuadrado
  - rectángulo.
- **Paralelógramos Oblicuos**: Sus ángulos interiores no son rectos, Estos son:
  - rombo
  - romboide.

Propiedades de todo paralelógramo:

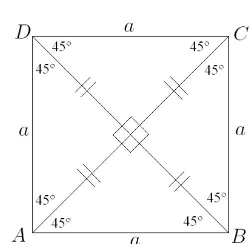
1. Lados opuestos congruentes
2. Ángulos opuestos congruentes
3. Ángulos consecutivos suplementarios
4. Las diagonales se dimidian

⋆ **Si un cuadrilátero cumple con una de estas propiedades entonces es un paralelogramo.**

- **Cuadrado**: Tiene los cuatro ángulos y los cuatro lados congruentes.

  Propiedades:

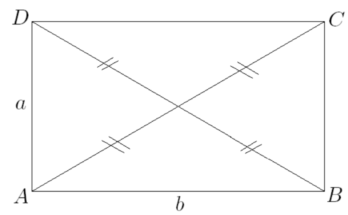
  1. Diagonales Congruentes
  2. Diagonales Perpendiculares
  3. Diagonales Bisectrices



- **Rectángulo**: Tiene sus lados contiguos desiguales.

  Propiedades:

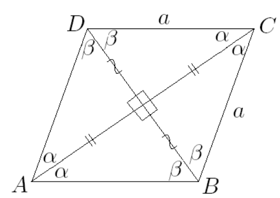
  1. Diagonales Congruentes



- **Rombo**: Tiene sus cuatro lados congruentes.

  Propiedades:

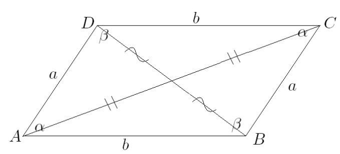
  1. Diagonales Perpendiculares
  2. Diagonales Bisectrices



- **Romboide**: Tiene sus lados contiguos desiguales.

  Propiedades:

  Solo tiene las cuatro propiedades generales de los paralelógramos.



9.6.2. Trapecios

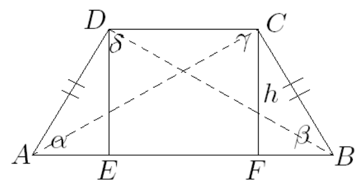
Tiene solo un par de lados paralelos, llamados bases.

Propiedades de todo trapecio:

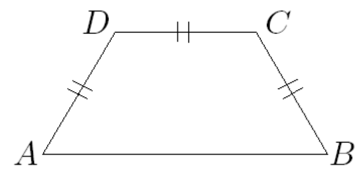
1. En todo trapecio la **mediana**[1] es igual a la semisuma de las bases.

- **Trapecio Isósceles**: Tiene:
  - Los lados no paralelos iguales. $\overline{AD} = \overline{BC}$
  - Losángulos basales iguales. $\alpha = \beta \qquad \gamma = \delta$
  - Las diagonales iguales. $\overline{AC} = \overline{BD}$
  - Al trazar sus alturas, se generan dos triángulos rectángulos congruentes, y en la base mayor un segmento igual a la base mayor. $\triangle AED \cong \triangle BFC \qquad \overline{EF} = \overline{DC}$

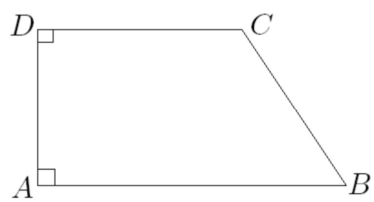
[1] Mediana: es el segmento que une los puntos medios de sus lados no paralelos.



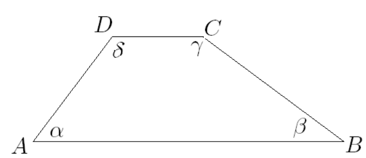
- **Trapecio Trisolátero**: Tiene tres lados iguales y posee las mismas propiedades del trapecio isósceles. $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$



- **Trapecio Rectángulo**: Tiene dos ángulos rectos. $\measuredangle CDA = \measuredangle DAB = 90°$



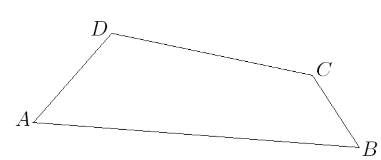
- **Trapecio Escaleno**: Tiene sus cuatro lados y sus cuatro ángulos distintos.
  $\overline{AB} \neq \overline{BC} \neq \overline{CD} \neq \overline{DE} \qquad \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq \delta$



9.6.3. Trapezoides

No tiene par de lados paralelos.

- **Trapezoide Asimétrico**: Es el cuadrilátero convexo sin lados paralelos que puede tener: cuatro lados distintos; dos iguales y dos distintos; tres iguales y uno distinto.

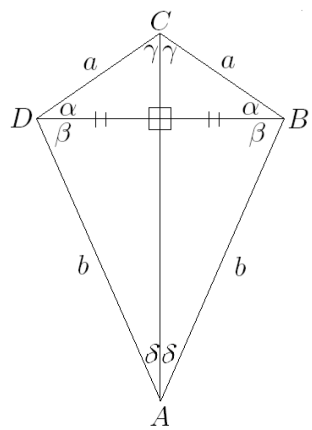


- **Trapezoide Simétrico o Deltoide**: Es formado por dos triángulos isósceles unidos por sus bases.

  Propiedades:

  1. Diagonales Perpendiculares

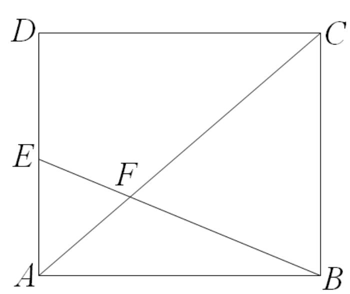
2. Diagonal mayor bisectriz
3. Diagonal mayor simetral de la diagonal menor



9.7. Mini Ensayo X Cuadriláteros

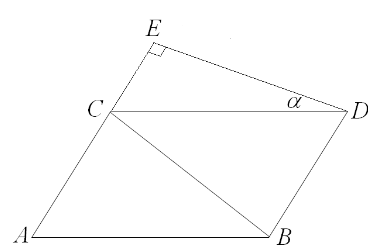
1. En el cuadrado $ABCD$ de la figura se ha trazado la diagonal $\overline{AC}$ y el $\measuredangle ABE$ mide la tercera parte del $\measuredangle ABC$, ¿cuál de las siguientes opciones NO es correcta?

   a) $\measuredangle ACB = 45°$
   b) $\measuredangle EFA = 60°$
   c) $\measuredangle AEB = 60°$
   d) $\measuredangle EFC = 105°$
   e) $\measuredangle DEB = 120°$



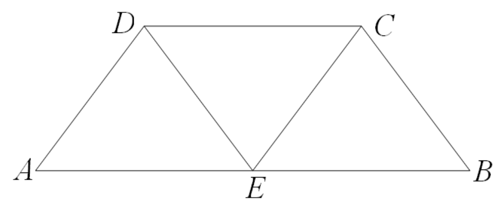
2. En la figura el $\triangle ABC$ es isósceles de base $\overline{AB}$, $ABCD$ es un rombo, si $\overline{DE} \perp \overline{AE}$ y $\measuredangle ACB = 60°$, entonces $\alpha =$

   a) 30°
   b) 45°
   c) 60°
   d) 75°
   e) 80°



3. En la figura $ABCD$ es un trapecio isósceles, $\overline{AB} : \overline{BC} = 2 : 1$, $\overline{EC} // \overline{AD}$. Si $\measuredangle ABC = 70°$ entonces $\measuredangle DEC =$

a) 70°
b) 60°
c) 55°
d) 30°
e) 20°

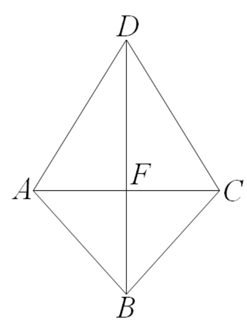


4. Al trazar una de las diagonales de un cuadrilátero se forman dos triángulo isósceles cuyas bases son la diagonal, sin embargo los ángulos basales de un triángulo miden el doble de los ángulos basales del otro, por lo tanto dicho cuadrilátero se trata de un:

   a) Cuadrado.
   b) Trapecio.
   c) Romboide.
   d) Trapezoide.
   e) Deltoide.

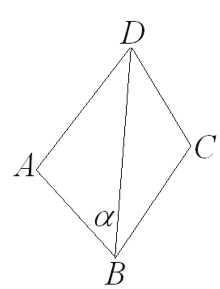
5. $ABCE$ es un deltoide $\overline{AF} : \overline{FD} = 1 : 2$, si $\overline{FC} = 4$, entonces $\overline{AD} =$

   a) $4\sqrt{5}$
   b) $4\sqrt{3}$
   c) $3\sqrt{3}$
   d) 4
   e) $2\sqrt{2}$



6. En la figura $\overline{BD}$ es bisectriz del $\measuredangle ADC$, $\overline{AD} = \overline{DC}$ y $\overline{AB} \perp \overline{BC}$, entonces $\alpha =$

   a) 30°
   b) 45°
   c) 55°
   d) 60°
   e) Ninguna de las anteriores.

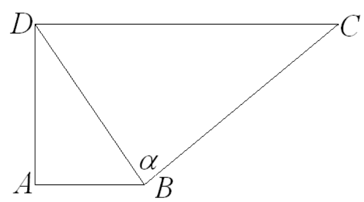


7. Al unir los puntos (2,4), (3,1), (6,4) y (7,1) del plano cartesiano, formamos un:

a) Cuadrado.
b) Rectángulo.
c) Rombo.
d) Romboide.
e) Trapecio.

8. En la figura $ABCD$ es un trapecio rectángulo en A y D, si $\measuredangle ABD = 40°$ y $\triangle BDC$ es isósceles de base $\overline{BC}$, ¿cuál es el valor del $\measuredangle \alpha$?

a) 70°
b) 30°
c) 90°
d) 45°
e) 120°

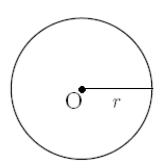


9. La mediana de un trapecio mide 20 cm. Si una de las bases es el triple de la otra, entonces la base mayor mide:

a) 40 cm
b) 30 cm
c) 15 cm
d) 10 cm
e) 5 cm

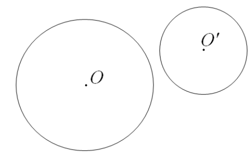
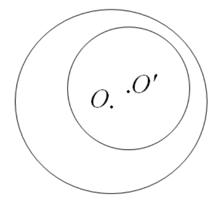
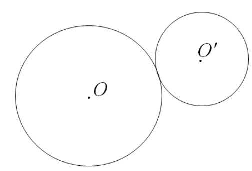
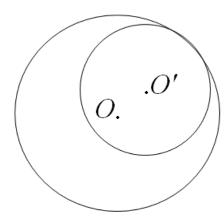
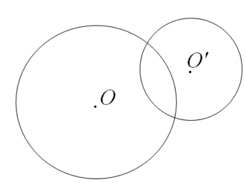
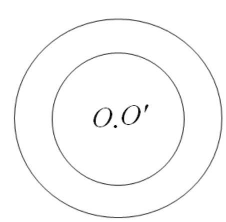
9.8. Circunferencia

Dado un punto O y una distancia r, se llama **circunferencia** de centro O y radio r al conjunto de todos los puntos del plano que están a la distancia r del punto O.



9.8.1. Posiciones Relativas a dos Circunferencias

Relación Entre Circunferencias	Descripción	Representación

Circunferencias Exteriores	Los puntos de cada una son exteriores a la otra.	
Circunferencias Interiores	Cuando todos los puntos de una de ellas, son interiores a la otra.	
Circunferencias Tangentes Exteriormente	Tienen un punto en común y los demás puntos de cada una son exterioresa la otra.	
Circunferencias Tangentes Interiores	cuando todos los puntos de una de ellas, son interiores de la otra.	
Circunferencias Secantes	Si tienen dos punto comunes.	
Circunferencias Concéntricas	Cuando tienen el mismo centro.	

9.9. Partes de la Circunferencia

Radio : Trazo cuyos extremos son el centro de la circunferencia y un punto de ésta. $\overline{OA}$

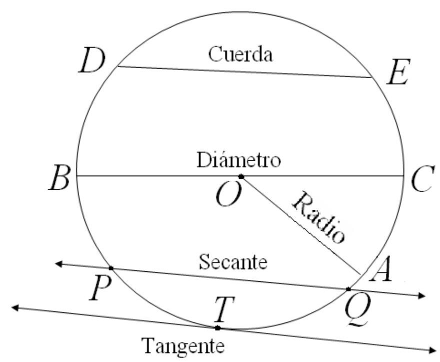
Cuerda : Trazo cuyos extremos son dos puntos de una circunferencia. $\overline{DE}$

Diámetro : Cuerda que contiene al centro de la circunferencia. $\overline{BC}$

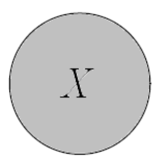
Secante : Recta que intersecta en dos puntos a la circunferencia. $\vec{PQ}$

Tangente : Recta que intersecta a la circunferencia en un solo punto. TM

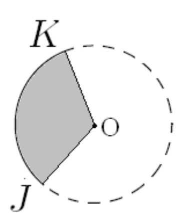
Arco : Es una parte de la circunferencia determinada por dos puntos distintos de ella. $E\overset{\frown}{N}C$



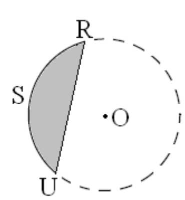
Círculo : Es la región interior de la circunferencia. X



Sector Circular : Es la parte del círculo comprendida entre dos radios. OJK



Segmento Circular : Es la parte del círculo comprendida entre un arco y la cuerda determinada por los extremos del arco. RSU



9.9.1. Teoremas Referentes a una Circunferencia

Teorema 1 : Si un radio de una circunferencia es perpendicular a una cuerda, entonces la dimidia y viceversa.

$$\boxed{\overline{OD} \perp \overline{AB} \Leftrightarrow \overline{AC} \cong \overline{CB}}$$

Teorema 2 : Si un radio de una circunferencia es perpendicular a una cuerda, entonces dimidia al arco que subtiende la cuerda y viceversa.

$$\boxed{\overline{OD} \perp \overline{AB} \Leftrightarrow \text{arco}(AD) \cong \text{arco}(DB)}$$

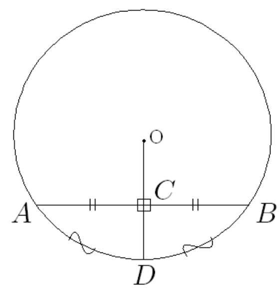


Figura 9.1: Teoremas 1 y 2

Teorema 3 : Cuerdas congruentes subtienden arcos congruentes y viceversa.

$$\boxed{\text{arco}(AB) \cong \text{arco}(CD) \Leftrightarrow \overline{CD} \cong \overline{AB}}$$

Teorema 4 : Cuerdas congruentes equidistan del centro y viceversa.

$$\boxed{\overline{OF} \cong \overline{OE} \Leftrightarrow \overline{CD} \cong \overline{AB}}$$

Teorema 5 : Cuerdas paralelas determinan entre ellas arcos congruentes.

$$\boxed{\overline{AB} \parallel \overline{GH} \rightarrow AG \cong BH}$$

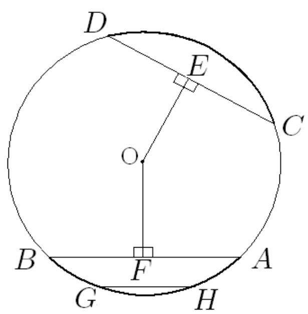
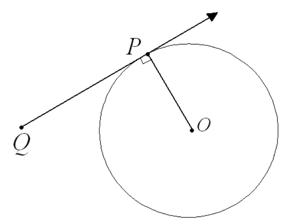


Figura 9.2: Teoremas 3, 4 y 5

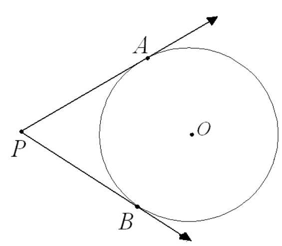
Teorema 6 : La recta tangente a una circunferencia es perpendicular al radio en el punto de tangencia.

$$\boxed{\overline{QP} \text{ tangente en } P \Rightarrow \overline{QP} \perp \overline{OP}}$$



Teorema 7 : Los segmentos tangentes trazados desde un punto a una circunferencia, con congruentes.

$$\boxed{\overline{PA} = \overline{PB}}$$



Teorema 8 : En todo cuadrilátero circunscrito a una circunferencia la suma de las longitudes de los lados opuestos es la misma.

$$\boxed{\overline{AB} + \overline{DC} = \overline{BC} + \overline{AD}}$$

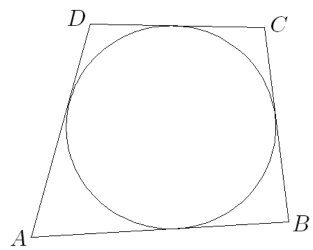
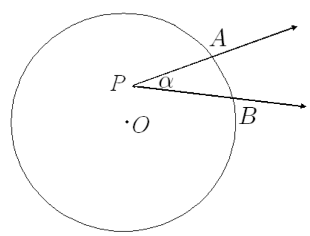


Figura 9.3: Teoremas 8

9.9.2. Ángulos en la Circunferencia

Ángulo Interior : Es todo ángulo cuyo vértice es un punto interior a la circunferencia. $\measuredangle APB$



Ángulo del Centro : Es todo ángulo interior cuyo vértice es el centro de la circunferencia. $\measuredangle DOE$

Ángulo Inscrito : Es todo ángulo cuyo vértice es un punto de la circunferencia y parte de sus rayos son cuerdas de ésta. $\measuredangle GHF$

Ángulo Semi-inscrito : Es todo ángulo cuyo vértice es un punto de la circunferencia, uno de sus rayos es tangente a la circunferencia justo en el vértice y parte del otro en una cuerda de ella. $\measuredangle BTA$

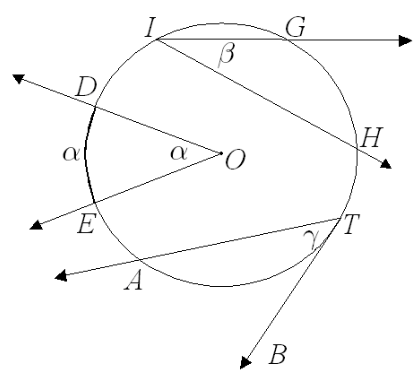
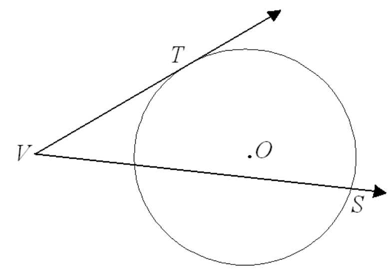
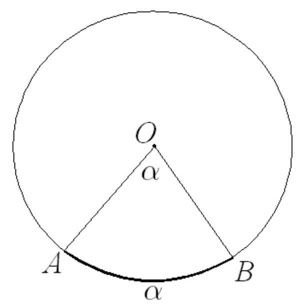


Figura 9.4: Ángulo del Centro, Inscrito y Semi-inscrito

Ángulo Exterior : Es todo ángulo cuyo vértice es un punto exterior a la circunferencia y sus dos rayos la intersectan. $\measuredangle TVS$



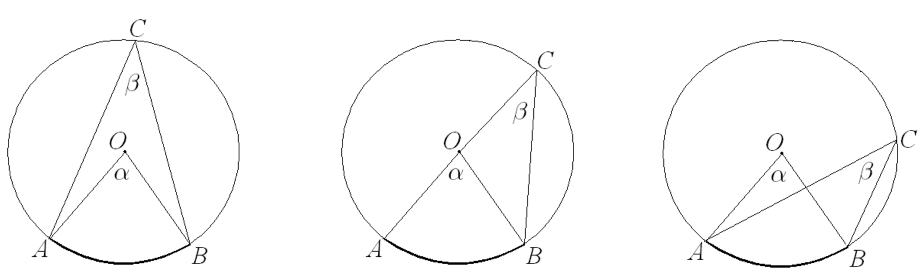
Medida Angular de un Arco : Es igual a la medida del ángulo del centro que subtiende dicho arco. arco$(AB) = \measuredangle AOB$



9.9.3. Teoremas Referentes a Ángulos en la Circunferencia

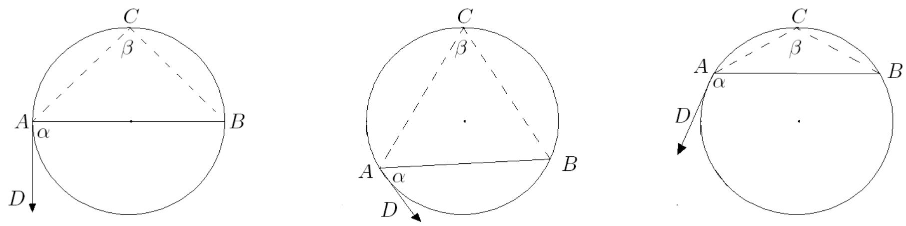
Teorema 1 : Todo ángulo inscrito en una circunferencia tiene como medida la mitad del ángulo del centro que subtiende el mismo arco.

$$\boxed{\beta = \frac{1}{2}\alpha}$$



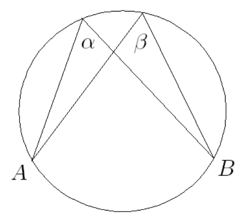
Teorema 2 : Todo ángulo semi-inscrito en una circunferencia tiene igual medida que cualquier ángulo inscrito que subtienede el mismo arco.

$$\boxed{\alpha = \beta}$$



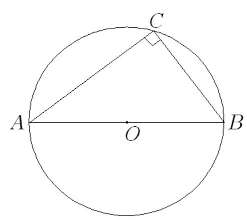
Teorema 3 : Todos los ángulos inscritos en una circunferencia que subtienden un mismo arco tienen igual medida.

$$\boxed{\alpha = \beta}$$



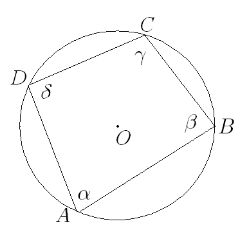
Teorema 4 : Todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

$$\boxed{\measuredangle ACB = 90^\circ}$$



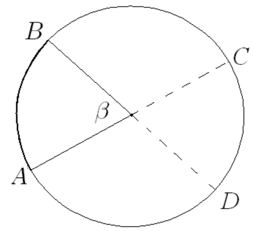
Teorema 5 : En todo cuadrilátero inscrito en una circunferencia los ángulos opuestos son suplementarios.

$$\boxed{\alpha + \gamma = 180^\circ} \quad \boxed{\beta + \delta = 180^\circ}$$



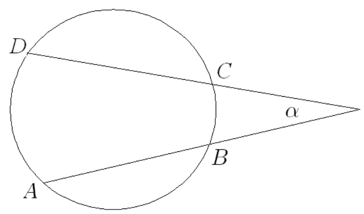
Teorema 6 : Todo ángulo interior a una circunferencia tiene por medida la semisuma de los arcos que comprenden sus lados y sus prolongaciones.

$$\boxed{\beta = \frac{\text{arco}(AB) + \text{arcp}(DC)}{2}}$$



Teorema 7 : Todo ángulo exterior a una circunferencia tiene por medida a la semidiferencia de los arcos que comprenden entre sus lados.

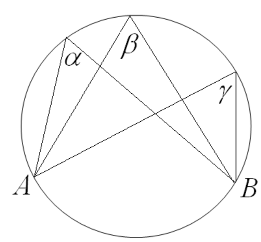
$$\boxed{\alpha = \frac{\text{arco}(AD) - \text{arco}(BC)}{2}}$$



9.10. Mini Ensayo XI Circunferencias

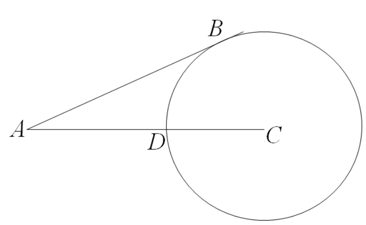
1. En la figura, el arco $AB = 70°$, entonces $2\alpha + \beta - \gamma =$

   a) 35°
   b) 70°
   c) 105°
   d) Ninguna de las anteriores.
   e) Falta información.



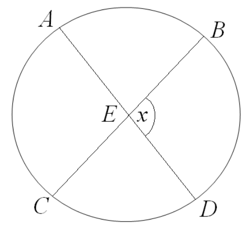
2. En la figura $\overline{AB}$ es tangente a la circunferencia, de centro C, en B, si $\measuredangle BAC = 30°$, ¿cuánto mide el arco DB?

   a) 50°
   b) 60°
   c) 90°
   d) 30°
   e) Falta Información.



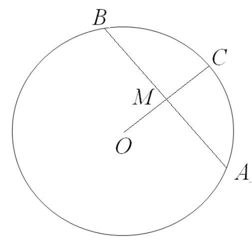
3. $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ son diámetros de la circunferencia de centro E. Si el $\measuredangle DAB = 40°$ entonces $\measuredangle x =$

a) 40°
b) 80°
c) 100°
d) 120°
e) 140°



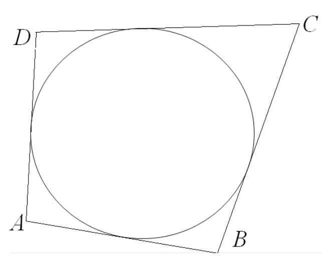
4. En la figura se tiene una circunferencia de centro O, M punto medio de $\overline{AB}$. Si $\measuredangle MBC : \measuredangle BCM = 3 : 2$, entonces $\measuredangle MAC =$

a) 27°
b) 36°
c) 40°
d) 45°
e) 54°



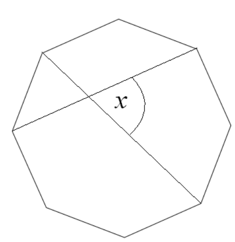
5. En la figura $\overline{AB} = 15$, $\overline{AD} = 12$ y $\overline{CD} = 25$, ¿cuánto mide $\overline{BC}$?

a) 12
b) 15
c) 20
d) 25
e) 28



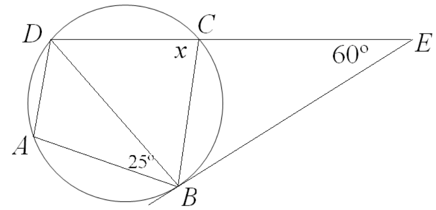
6. El octágono de la figura es regular, ¿cuánto mide el $\measuredangle x$?

a) 22,5°
b) 45°
c) 67,5°
d) 90°
e) 112,5°



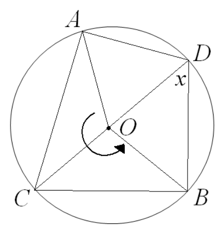
7. $\overline{DE}$ es secante a la circunferencia y $\overline{EB}$ es tangente a la circunferencia, si $\overline{DC}//\overline{AB}$ entonces el $\measuredangle x$ mide:

a) 35°
b) 50°
c) 55°
d) 85°
e) 90°



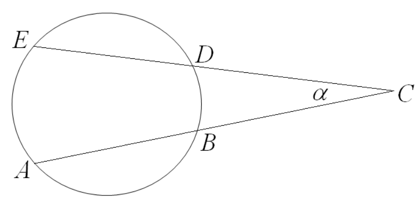
8. En la figura se muestra una circunferencia de centro O, el $\measuredangle AOB = 200°$, el arco $AC = 40°$, entonces el valor de el $\measuredangle x$ es:

a) 70°
b) 80°
c) 100°
d) 40°
e) 45°



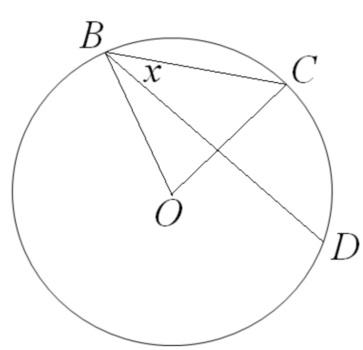
9. Dado que el arco $BD = 1/9$ de la circunferencia y el arco EA es $1/4$ de la misma, entonces el valor del $\measuredangle\alpha$ será:

a) 65°
b) 50°
c) 130°
d) 45°
e) 25°



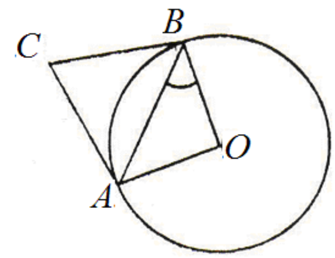
10. En la circunferencia de centro O de la figura, se tiene que el arco CD es igual al arco BC y $\measuredangle COB = 78°$ entonces el $\measuredangle x$ será:

a) 78°
b) 36°
c) 39°
d) Otro valor.
e) Falta información.



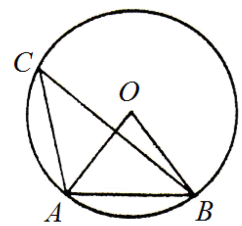
11. En la figura $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ son tangentes a la circunferencia, si el $\measuredangle ACB = 70°$ entonces el $\measuredangle ABO =$

a) 20°
b) 35°
c) 45°
d) 55°
e) 70°



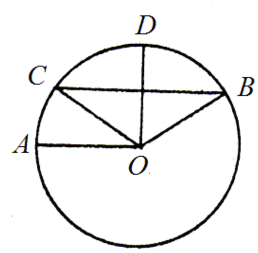
12. En la circunferencia de centro O, el $\measuredangle AOB = \frac{1}{2}\measuredangle BAO$, ¿cuánto mide el $\measuredangle ACB$?

a) 18°
b) 22,5°
c) 36°
d) 45°
e) 72°



13. En la circunferencia de centro O $\overline{AO}//\overline{BC}$, $\overline{OC} = \overline{CB}$ y $\overline{OD} \perp \overline{BC}$, entonces el $\measuredangle AOC =$

a) 30°
b) 45°
c) 60°
d) 75°
e) Falta información.

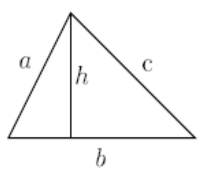
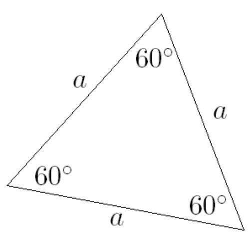
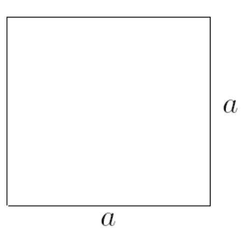
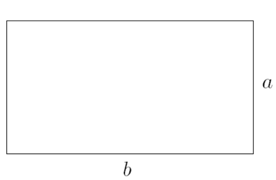


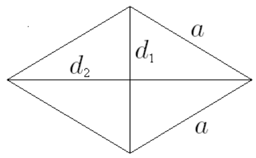
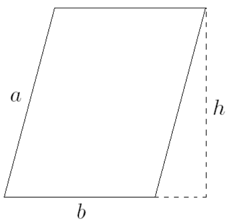
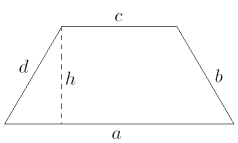
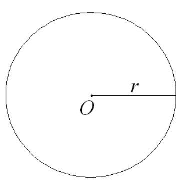
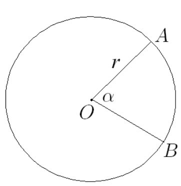
9.11. Áreas y Perímetros

Perímetro : De un polígono, es la suma de las longitudes de todos sus lados.

Área : Es la medida que le corresponde a la región poligonal

9.11.1. Áreas y Perímetros de Figuras Planas

Figura	**Nombre**	**Claves**	**Perímetro**	**Área**
	**Triángulo**	h=altura b=base	$P = a + b + c$	$A = \dfrac{b \cdot h}{2}$
	**Triángulo Equilátero**	a=lado	$P = 3a$	$A = \dfrac{a^2}{4}\sqrt{3}$
	**Cuadrado**	a=lado	$P = 4a$	$A = ab$
	**Rectángulo**	a=altura b=base	$P = 2a + 2b$	$A = ab$

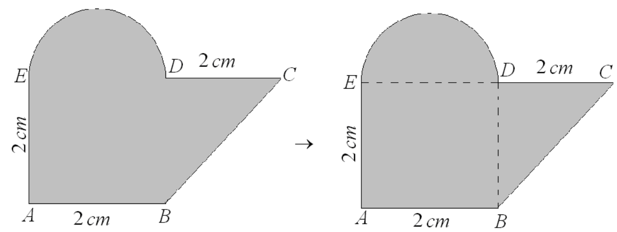
	**Rombo**	a=lado d_1, d_2=diagonales	$P = 4a$	$A = \dfrac{d_1 d_2}{2}$
	**Paralelógramo Cualquiera**	a, b=lados h=altura	$P = 2a + 2b$	$A = bh$
	**Trapecio**	a, b, c, d=lados d_1, d_2=diagonales	$P = a + b + c + d$	$A = \dfrac{a + c}{2} h$
	**Círculo**	r=radio O=centro	$P = 2\pi r$	$A = \pi r^2$
	**Sector Circular**	AB=arco OB, OA=radios α=ángulo	$P = \dfrac{\alpha}{360°} 2\pi r + 2r$	$A = \dfrac{\alpha}{360°} \pi r^2$

9.11.2. Suma de Áreas

En muchos ejercicios de geometría en la PSU se pide el cálculo de algún área específica formada por distintas figuras geométricas o por partes de ellas, en algunos de éstos ejercicios se ocupa el término "área achurada" o "área sombreada" para referirse al área en cuestión.

La manera de resolver éstos ejercicios es descomponer el área pedida en figuras geométricas que nos sean conocidas y que podamos calcular su valor, pues al sumar las áreas de todas las figuras que componen la definitiva obtendremos el valor del área pedida.

♠ Ejemplo:

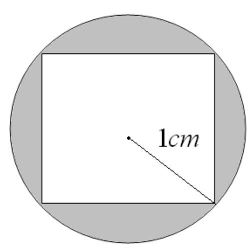


$$
\begin{aligned}
A_{\text{Total}} &= \underbrace{A_{\text{Semi círculo}}}+\underbrace{A_{\text{Cuadrado}}}+\underbrace{A_{\text{Triángulo}}}\\
&= \quad \frac{\pi\cdot 1^2}{2} \quad + \quad 2^2 \quad + \quad \frac{2\cdot 2}{2}\\
&= \frac{\pi}{2}+4+2\\
&= 6+\frac{\pi}{2}
\end{aligned}
$$

9.11.3. Diferencia de Áreas

Éstos ejercicios son aquellos en que es necesario "restar" áreas para poder obtener lo pedido, pues el área sombreada está entre figuras geométricas.

♠ Ejemplo:



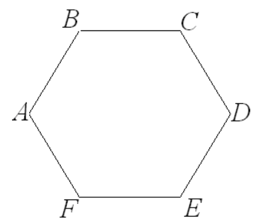
$$
\begin{aligned}
A_{\text{Total}} &= \underbrace{A_{\text{círculo}}}-\underbrace{A_{\text{cuadrado}}}\\
&= \quad \pi\cdot 1^2 \quad - \quad \sqrt{2}^2\\
&= \pi-2
\end{aligned}
$$

El lado de el cuadrado lo obtenemos suponiéndolo como el cateto del triángulo rectángulo que se forma al continuar el radio dibujado, y luego cupando el teorema de Pitágoras.

9.12. Mini Ensayo XII
Áreas y Perímetros

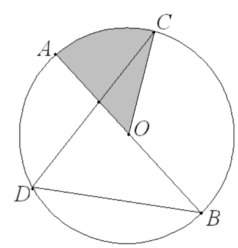
1. $ABCDEF$ es un hexágono regular de lado 2 cm, ¿cuál es el área del hexágno?

a) $6\sqrt{3}$
b) $8\sqrt{3}$
c) $12\sqrt{3}$
d) $16\sqrt{3}$
e) $18\sqrt{3}$



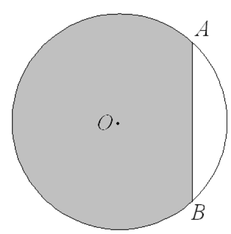
2. En la circunferencia de centro O y radio de 6 cm, el $\measuredangle BDC = 70°$, entonces el área y perímetro de la zona achurada son respectivamente: (concidere $\pi = 3$)

a) 30 cm^2; 22 cm
b) 12 cm^2; 22 cm
c) 30 cm^2; 16 cm
d) 12 cm^2; 16 cm
e) Falta información.



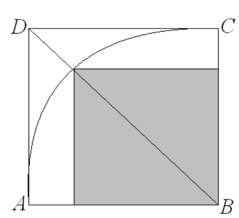
3. En la circunferencia de centro O con un radio de 1 cm, el arco AB es la cuarta parte de la circunferencia, ¿cuál es el valor del área achurada?

a) $\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{2}$
b) $\frac{4}{3}\pi + \frac{1}{2}$
c) $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$
d) $\frac{3}{4}\pi$
e) Falta información.



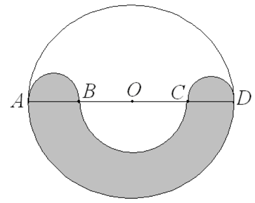
4. $ABCD$ es un cuadrado de lado 6 cm y el arco AC es el de una circunferencia de centro B, ¿cuál es el perímetro del área achurada?

a) $6\sqrt{2}$
b) $9\sqrt{2}$
c) $12\sqrt{2}$
d) $15\sqrt{2}$
e) $18\sqrt{2}$

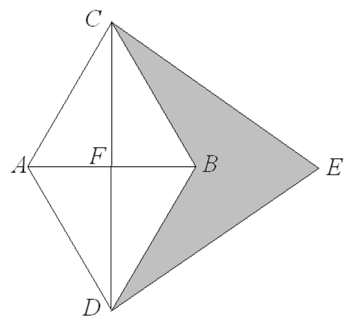


5. B, O y C dividen al diámetro $\overline{AD}$ en cuatro partes iguales, si $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ son diámetros de las respectivas semicircunferencias, entonces la razón entre el área no achurada y la achurada es:

a) 9 : 7
b) 7 : 5
c) 1 : 1
d) 1 : 2
e) 1 : 4



6. Los $\triangle ABC$, $\triangle ADB$ y $\triangle DEC$ son equiláteros, si $\overline{AD} = 6\,cm$ entonces el área achurada es:



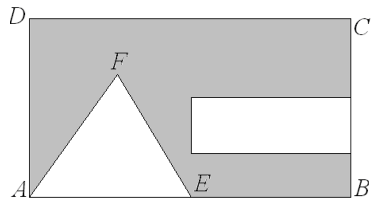
a) $18\sqrt{3}\ cm^2$
b) $20\ cm^2$
c) $6\sqrt{5}\ cm^2$
d) $3\sqrt{3}\ cm^2$
e) Ninguna de las anteriores.

7. Determine el área de un triángulo rectángulo sabiendo que sus lados son 3 números pares consecutivos.

a) 3
b) 6
c) 12
d) 24
e) 40

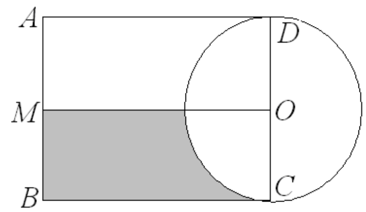
8. En un rectángulo $ABCD$ tal que $\overline{BC} = 12$, se han dibujado el $\triangle AEF$ equilátero en que $\overline{AE} = \overline{EB} = 7\,cm$ y un rectángulo de ancho igual a la tercera parte de $\overline{BC}$, con largo la mitad de $\overline{AB}$, ¿cuál es el perímetro del área sombreada?

a) $61\ cm$
b) $65\ cm$
c) $69\ cm$
d) $73\ cm$
e) $80\ cm$



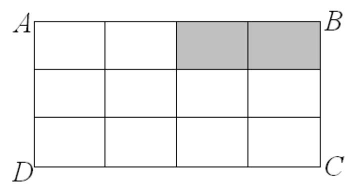
9. En la figura $ABCD$ es rectángulo y $\overline{CD} = 2\,cm$ es diámetro de la circunferencia de centro O si $\overline{AB} : \overline{BC} = 1 : 2$ y M es punto medio de $\overline{AB}$, entonces el área achurada es:

a) $\left(4 - \frac{\pi}{4}\right)\ cm^2$
b) $\left(8 - \frac{\pi}{2}\right)\ cm^2$
c) $(4 - \pi)\ cm^2$
d) $(8 - 2\pi)\ cm^2$
e) Ninguna de las anteriores.



10. Si el rectángulo $ABCD$ está dividido en 12 rectángulos congruentes, ¿cuál de las siguientes expresiones representa el área achurada?

I. $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{4}$ del área de $ABCD$
II. $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{2}$ del área de $ABCD$
III. $\frac{3}{24}$ del área de $ABCD$



a) Solo I
b) Solo II
c) I y II
d) I y III
e) I, II y III

11. Si el radio de una circunferencia mide 8 m, ¿Cuánto mide el perímetro de un cuadrado inscrito en ella?

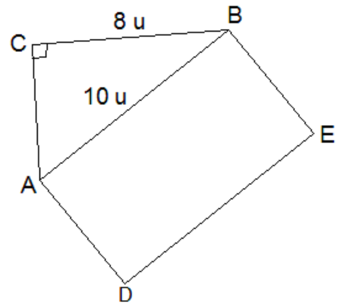
a) $16\sqrt{2}\ m$
b) $32\sqrt{2}\ m$
c) $40\sqrt{2}\ m$
d) $64\sqrt{2}\ m$
e) $256\sqrt{2}\ m$

12. El área de la figura que se obtiene al unir los puntos (0,0), $(-3, 5)$ y $(-3{,}0)$ es:

a) 0
b) 3
c) 6
d) 7,5
e) 15

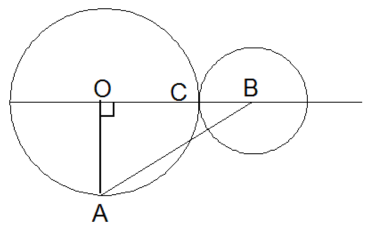
13. En la figura, ¿cuánto debe medir el ancho del rectángulo $ABED$, para que su área sea el doble del área del $\triangle ABC$?

a) $2{,}4u$
b) $4{,}8u$
c) $9{,}6u$
d) $8{,}2u$
e) $8u$



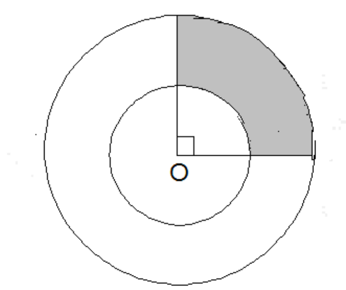
14. En la figura se han dibujado dos circunferencias tangentes exteriores de centro O y B respectivamente, si $\overline{OA} \perp \overline{OB}$, $\overline{BC} = \frac{1}{2}\overline{OC} = 2\ cm$, ¿cuál es el perímetro del $\triangle ABO$?

a) $10\ cm$
b) $16\ cm$
c) $12\sqrt{3}\ cm$
d) $8 + 2\sqrt{10}\ cm$
e) $10 + 2\sqrt{13}\ cm$



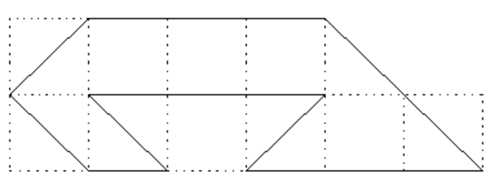
15. En la circunferencia, el área sombreada mide $5\pi\ cm^2$, si el radio de la circunferencia mayor es $6\ cm$, entonces el radio menor mide:

a) $2\ cm$
b) $3\ cm$
c) $4\ cm$
d) $5\ cm$
e) $6\ cm$



16. Si cada cuadrado de la figura tiene un área de $4\ cm^2$, ¿cuál es el perímetro de la figura?

a) $32\ cm$
b) $32\sqrt{2}\ cm$
c) $6\sqrt{2} + 10\ cm$
d) $6\sqrt{2} + 20\ cm$
e) $12\sqrt{2} + 20\ cm$



Capítulo 10

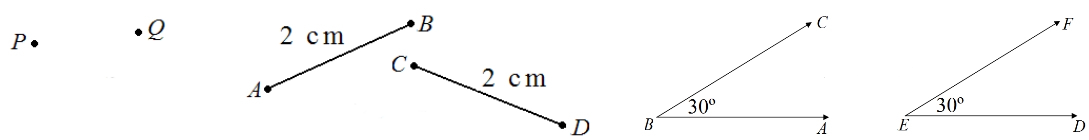
Geometría de Proporciones

En el presente capítulo estudiaremos las propiedades que cumplen las medidas de los lados de distintas figuras geométricas y como éstas pueden determinar relaciones entre distintas figuras, de distintos tamaños, y distintas posiciones. Veremos también propiedades de segmentos que cruzan a una circunferencia, y relacionaremos los ángulos y los lados de los triángulos rectángulos. Todas éstas herramientas te serán muy útiles al momento de enfrentarte a una cantidad importante de ejercicios en la PSU.

Versión 1.0, Febrero de 2008

10.1. Congruencia

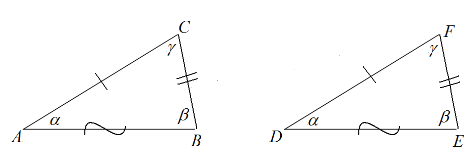
Dos figuras son congruentes si tienen la misma forma y el mismo tamaño, esto lo podemos verificar superponiendo las dos figuras, las cuales deben calzar exactamente. Tenemos que dos puntos cualesquiera siempre son congruentes así también dos rectas de la misma longitud y dos ángulos de la misma medida.



$P \cong Q$ $\qquad$ $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ $\qquad$ $\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$

10.1.1. Congruencia de Triángulos

Dos triángulos son congruentes si sus ángulos y sus lados coinciden correspondientemente.

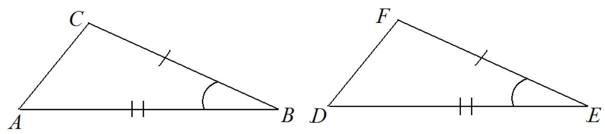


$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

10.1.2. Criterios de Congruencia

Criterio LAL (Lado-Ángulo-Lado)

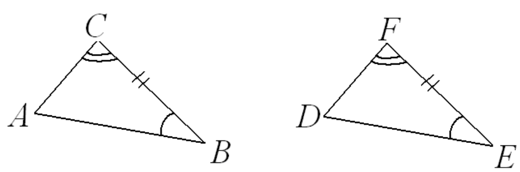
Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados congruentes y el ángulo comprendido entre ellos también lo es.



$$\overline{AB} \cong \overline{DE}$$
$$\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$$
$$\overline{BC} \cong \overline{EF}$$

Criterio ALA (Ángulo-Lado-Ángulo)

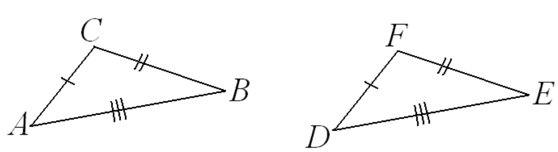
Dos triángulos son congruentes si tienen dos ángulos congruentes y el lado comprendido entre estos también lo es.



$$\measuredangle ABC \cong \measuredangle DEF$$
$$\overline{BC} \cong \overline{EF}$$
$$\measuredangle BCA \cong \measuredangle EFD$$

Criterio LLL (Lado-Lado-Lado)

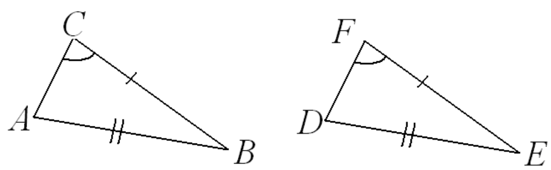
Dos triángulos son congruentes si tiene sus tres lados congruentes.



$$\overline{AB} \cong \overline{DE}$$
$$\overline{BC} \cong \overline{EF}$$
$$\overline{CA} \cong \overline{FD}$$

Criterio LLA (Lado-Lado-Ángulo)

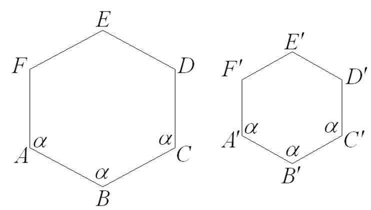
Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados congruentes y el ángulo opuesto al lado de mayor medida también lo es.



$$\overline{AB} \cong \overline{DE}$$
$$\overline{BC} \cong \overline{EF}$$
$$\measuredangle BCA \cong \measuredangle EFD$$

10.2. Semejanza

Dos figuras son semejantes si tienen la misma forma y sus ángulos son respectivamente iguales y sus lados proporcionales o sea que una es una ampliación o reducción de la otra.



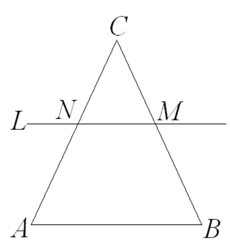
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{C'D'}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{D'E'}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{E'F'}} = \frac{\overline{FA}}{\overline{F'A'}}$$

10.2.1. Semejanza de Triángulos

Dos triángulos son semejantes si sus ángulos son iguales uno a uno respectivamente y los lados opuestos a estos ángulos son proporcionales.

10.2.2. Teorema fundamental para la existencia de Triángulos Semejantes

Toda paralela a un lado de un triángulo determina otro triángulo semejante al primero.



10.2.3. Criterios de Semejanza

Criterio AA (Ángulo-Ángulo)

Dos triángulos son semejantes si tienen dos de sus ángulos respectivamente iguales.

Criterio LAL (Lado-Ángulo-Lado)

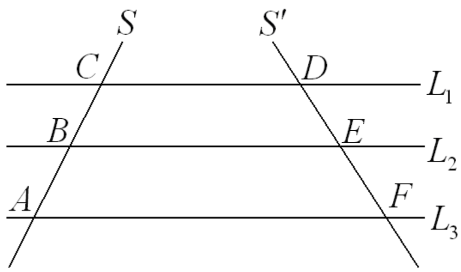
Dos triángulos son semejantes si dos de sus lados son proporcionales respectivamente y el ángulo comprendido entre ellos es congruente.

Criterio LLL (Lado-Lado-Lado)

Dos triángulos son semejantes si sus tres lados son proporcionales y sus ángulos congruentes respectivamente.

10.3. Teorema de Thales

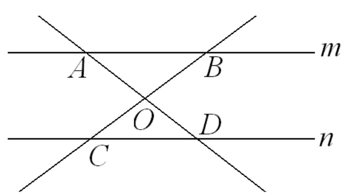
Si dos o más paralelas cortan a dos transversales determinan en ellas segmentos correspondientes proporcionales.



$$\frac{\overline{CB}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}$$

10.3.1. Aplicación al Teorema de Thales

Si $m /\!/ n$. Entonces:

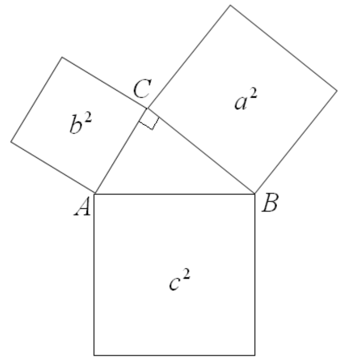


$$\frac{\overline{AO}}{\overline{OD}} = \frac{\overline{BO}}{\overline{OC}}$$

10.4. Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo , la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre sus catetos, es igual al área del cuadrado construido sobre su hipotenusa.

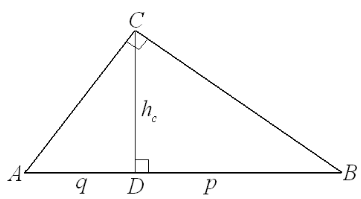
$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$



10.5. Teorema de Euclides

10.5.1. Teorema de Euclides referente a una Altura

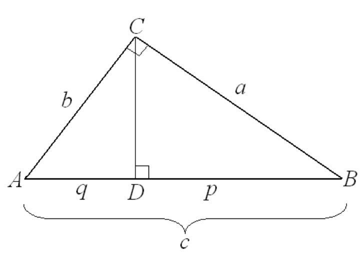
En todo triángulo rectángulo, la altura correspondiente a la hipotenusa es media proporcional geométrica entre los segmentos que ella determina sobre la hipotenusa.
p y q son la proyecciones de los catetos a y b sobre la hipotenusa respectivamente.



$$\frac{q}{h_c} = \frac{h_c}{p}$$
$$h_c^2 = p \cdot q$$

10.5.2. Teorema de Euclides referido a un Cateto

En todo triángulo rectángulo un cateto es media proporcional geométrica entre la hipotenusa y la proyección de dicho cateto sobre ella.



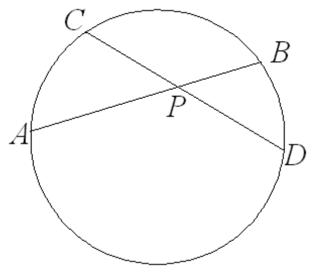
$$a^2 = p \cdot c$$
$$b^2 = q \cdot c$$

10.6. Relación Métrica en la Circunferencia

10.6.1. Teorema de las Cuerdas

Si dos cuerdas de una circunferencia se cortan, el producto de los segmentos determinados en una de ellas es igual al producto de los segmentos determinados en la otra.

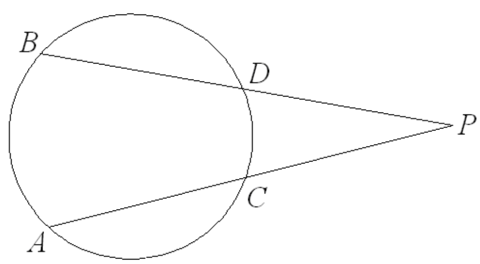
$$\boxed{\overline{AP} \cdot \overline{PB} = \overline{CP} \cdot \overline{PD}}$$



10.6.2. Teorema de las Secantes

Si desde un punto exterior a una circunferencia se trazan dos secantes, el producto de una de ellas por su segmento exterior es igual al producto de la otra secante por su segmento exterior.

$$\boxed{\overline{PA} \cdot \overline{PC} = \overline{PB} \cdot \overline{PD}}$$

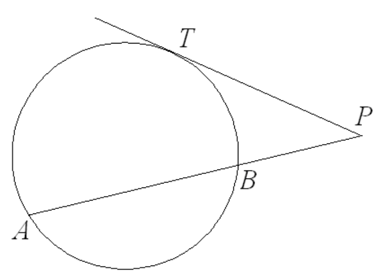


10.6.3. Teorema de la Tangente

Si desde un punto exterior de una circunferencia se trazan una tangente y una secante, la tangente es media proporcional geométrica entre la secante y su segmento externo.

$$\boxed{\frac{\overline{PT}}{\overline{PA}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PT}}}$$

$$\boxed{\overline{PT}^2 = \overline{PA} \cdot \overline{PB}}$$

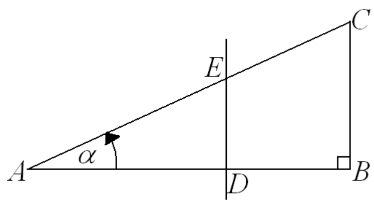


10.7. Trigonometría

La trigonometría es la rama de la matemática que relaciona la medida de los ángulos agudos en un triángulo rectángulo con razones entre los lados del mismo, dichas razones se conocen como *Razones Trigonométricas*.

10.7.1. Triángulos Rectángulos Semejantes

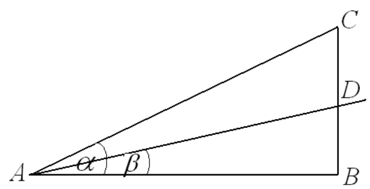
Si nos damos un triángulo ABC rectángulo y trazamos una paralela a uno de los catetos, formamos otro triángulo rectángulo ADE semejante al anterior (Utilizando el critério AA de semejanza), entonces notemos que la razón entre los catetos del $\triangle ABC$ es equivalente con la razón de los catetos del $\triangle ADE$, es decir:



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DE}}$$

Lo anterior nos indica que para cualquier triángulo rectángulo donde uno de sus ángulos agudos es α, siempre tendrá la misma razón entre sus lados, es decir, no importan las dimensiones del triángulo.

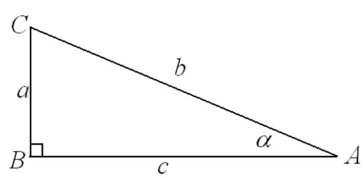
Lo único que puede cambiar esta razón no es la medida de los lados, más bien, la medida de su ángulos, de manera que:



$$\text{Si } \alpha \neq \beta \Rightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \neq \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}$$

10.7.2. Razónes Trigonométricas

Sea el $\triangle ABC$ rectángulo en B, de catetos a y c y de hipotenusa b, donde a es el cateto opuesto a α y c es el cateto adyacente a α, como se muestra en la figura,



Entonces definiremos las siguientes razones trigonométricas

† **Seno del ángulo** α, se abrevia como sen(α), se define de la forma:

$$\text{sen}(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{b}$$

† **Coseno del ángulo** α, se abrevia como cos(α), se define de la forma:

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{b}$$

† **Tangente del ángulo** α, se abrevia como $\tan(\alpha)$, se define de la forma:

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{c}$$

Y a sus recíprocos:

† **Cosecante del ángulo** α, se abrevia como $\mathrm{cosec}(\alpha)$, se define de la forma:

$$\mathrm{cosec}(\alpha) = \frac{1}{\mathrm{sen}(\alpha)} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{b}{a}$$

† **Secante del ángulo** α, se abrevia como $\sec(\alpha)$, se define de la forma:

$$\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{b}{c}$$

† **Cotangente del ángulo** α, se abrevia como $\cot(\alpha)$, se define de la forma:

$$\cot(\alpha) = \frac{1}{\tan(\alpha)} = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{a}$$

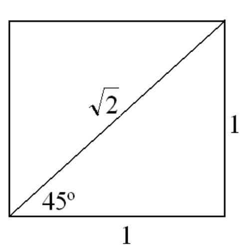
10.7.3. Ángulos Importantes y sus razones trigonométricas

1. Ángulo de 0°:

   En éste caso podemos pensar que el ángulo de cero grados es aquel que está en un triángulo rectángulo donde su cateto opuesto es nulo, lo que implica que las razones $\mathrm{sen}(0°)$ y $\tan(0°)$ tiene valor 0, sin embargo en éste mismo triángulo la "hipotenusa" está sobre el "cateto adyacente" los que implicaría una magnitud igual para ambos, es decir, la razón $\cos(0°) = 1$.

2. Ángulo de 45°:

   Pensemos en uno de los triángulos rectángulos isósceles que se forma al trazar una de las diagonales de un cuadrado de lado 1, ésta diagonal tiene valor igual a $\sqrt{2}$[1], entonces los ángulos basales de éste triángulo isóceles son iguales a 45°, de manera que podemos encontrar todas sus razones trigonométricas fácilmente:

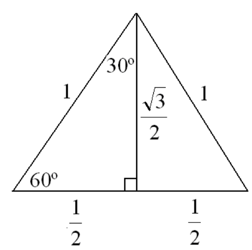


$$\begin{aligned}
\mathrm{sen}(45°) &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \\
\cos(45°) &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} = \tfrac{\sqrt{2}}{2} \\
\tan(45°) &= \tfrac{1}{1} = 1 \\
\mathrm{cosec}(45°) &= \tfrac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \\
\sec(45°) &= \tfrac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2} \\
\cot(45°) &= \tfrac{1}{1} = 1
\end{aligned}$$

[1] Utilizando el Teorema de Pitágoras

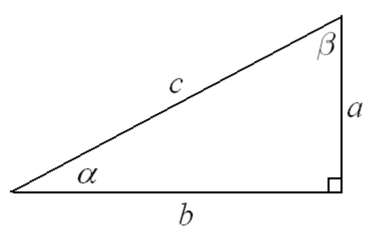
3. Ángulos de 30° y 60°:

   Estos ángulos los podemos encontar en uno de los triángulos rectángulos que se forman al dividir un triángulo equilátero de lado 1, a través de su altura, como se ve en la figura:



$$\begin{aligned}
\text{sen}(30°) &= \tfrac{1/2}{1} = \tfrac{1}{2}\\
\cos(30°) &= \tfrac{\sqrt{3}/2}{1} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\\
\tan(30°) &= \tfrac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \tfrac{1}{\sqrt{3}} = \tfrac{\sqrt{3}}{3}\\
\text{sen}(60°) &= \tfrac{\sqrt{3}/2}{1} = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\\
\cos(60°) &= \tfrac{1/2}{1} = \tfrac{1}{2}\\
\tan(60°) &= \tfrac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}
\end{aligned}$$

Ahora, observemos el siguiente triángulo rectángulo, notemos que $\alpha+\beta = 90°$, lo que significa que son complementarios,



Observemos que:

† $\text{sen}(\alpha) = \frac{a}{c} = \cos(\beta)$

† $\cos(\alpha) = \frac{b}{c} = \text{sen}(\beta)$

Ésta es una propiedad que se cumple para cualquier par de ángulos complementarios, de la cual se desprenden:

† $\text{sen}(\alpha) = \cos(90° - \alpha)$

† $\tan(\alpha) = \cot(90° - \alpha)$

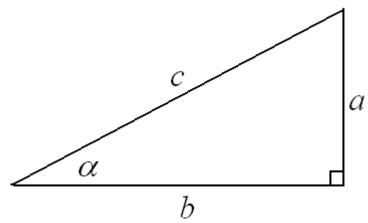
† $\sec(\alpha) = \text{cosec}(90° - \alpha)$

En resumen podemos establecer la siguiente tabla de razones trigonométricas de ángulos importantes:

	sen( )	cos( )	tan( )	cosec( )	sec( )	cot( )
0°	0	1	0	No existe	1	No existe
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
90°	1	0	No existe	1	No existe	0

10.7.4. Identidades Trigonométricas

Las identidades trigonométricas nacen de las relaciones que cumplen los lados de un triángulo rectángulo, a través de los teoremas como el de Pitágoras, por ejemplo, veamos el triángulo de la figura y las propiedades que cumplen sus lados



En él se cumple la relación descrita por Pitágoras:

$$\begin{array}{rcll} a^2+b^2 &=& c^2 & \rightarrow \text{ Por el Teorema de Pitágoras, ahora si dividimos a ambos lados por } c^2 \text{ obtenemos} \\ \frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2} &=& \frac{c^2}{c^2} & \\ \left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2 &=& 1 & \rightarrow \text{ Como podrás darte cuenta el primer término del lado izquierdo de ésta igualdad corresponde al seno del ángulo } \alpha \text{, y el segundo término corresponde al coseno. Por lo tanto:} \\ \operatorname{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha) &=& 1 & \rightarrow \text{ Lo que es válido para cualquier valor de } \alpha. \end{array}$$

Ésta es conocida *Identidad Trigonométrica Fundamental*, y de ella podemos obtener otras identidades importantes, por ejemplo:

$$\begin{array}{rrcl} & \operatorname{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha) &=& 1 \qquad / \div \cos^2(\alpha) \\ & \dfrac{\operatorname{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} &=& \dfrac{1}{\cos^2(\alpha)} \\ & \dfrac{\operatorname{sen}^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}+\dfrac{\cos^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} &=& \left(\dfrac{1}{\cos(\alpha)}\right)^2 \\ & \left(\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha)}{\cos(\alpha)}\right)^2+1 &=& \left(\dfrac{1}{\cos(\alpha)}\right)^2 \\ & (\tan(\alpha))^2+1 &=& (\sec(\alpha))^2 \\ & \tan^2(\alpha)+1 &=& \sec^2(\alpha) \\ \Rightarrow & \sec^2(\alpha)-\tan^2(\alpha) &=& 1 \end{array}$$

Realizando el mismo proceso pero ésta vez dividiendo inicialmente por $\operatorname{sen}^2(\alpha)$, obtenemos la siguiente identidad:

$$\operatorname{cosec}^2(\alpha)-\cot^2(\alpha)=1$$

De manera que hemos obtenido éstas tres importantes identidades de la trigonometría:

† $\operatorname{sen}^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$

† $\sec^2(\alpha)-\tan^2(\alpha)=1$

† $\operatorname{cosec}^2(\alpha)-\cot^2(\alpha)=1$

10.7.5. Ecuaciones Trigonométricas

Una ecuación trigonométrica es una ecuación en que uno, o ambos miembros de la igualdad poseen la o las incógnitas en una razón trigonométrica.

♠ Ejemplo:

† $\operatorname{sen}(x) + 2 = \cos(y)$, es una ecuación trigonométrica.

† $\operatorname{sen}(30) + 2x^2 = \cos(60) - y$, NO es una ecuación trigonométrica.

Para resolver éste tipo de ecuaciones generalmente se utilizan las identidades trigonométricas vistas anteriormente y/o los valores de las razones trigonométricas en ángulos conocidos.

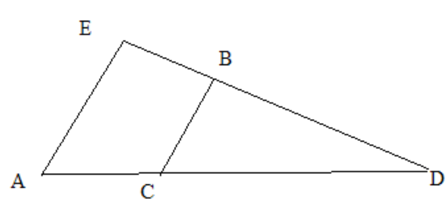
♠ Ejemplo:

$$\begin{aligned}
\sqrt{8\operatorname{sen}(x) - 3} + 4 &= 5 \\
\sqrt{8\operatorname{sen}(x) - 3} &= 5 - 4 \\
\sqrt{8\operatorname{sen}(x) - 3} &= 1 \\
\Rightarrow \quad 8\operatorname{sen}(x) - 3 &= 1 \\
8\operatorname{sen}(x) &= 1 + 3 \\
8\operatorname{sen}(x) &= 4 \\
\operatorname{sen}(x) &= \frac{4}{8} \\
\operatorname{sen}(x) &= \frac{1}{2} \\
\Rightarrow \quad x &= 30^\circ
\end{aligned}$$

10.8. Mini Ensayo XIII Geometría de Proporciones

1. $\overline{AE}//\overline{CB}$. Determine la medida de $\overline{DB}$ si $\overline{AD} = 20\ cm$, $\overline{AC} = 6\ cm$ y $\overline{ED} = 18\ cm$

   a) 12,6 *cm*
   b) 15 *cm*
   c) 11 *cm*
   d) 13 *cm*
   e) 18 *cm*

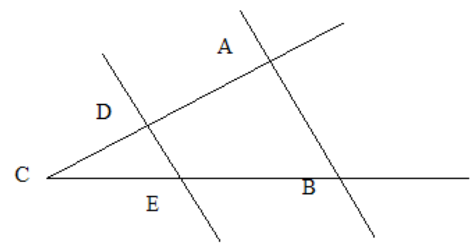


2. Si $\overline{DE}//\overline{AB}$. Entonces es correcto:

I. $\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CD}}$

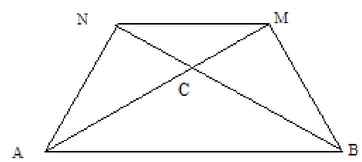
II. $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EC}}$

III. $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{CD}}$



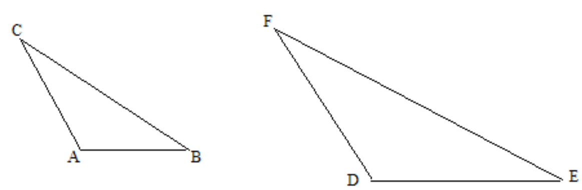
a) Solo I
b) Solo II
c) Solo III
d) II y III
e) Todas

3. $ABMN$ es trapecio, si $\overline{NC} = 8$, $\overline{MC} = 12$ y $\overline{BC} = 15$, entonces $\overline{AC} =$



a) 22,5 cm
b) 16,6 cm
c) 10 cm
d) 11 cm
e) 12 cm

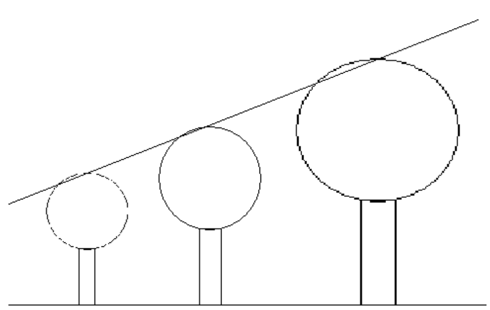
4. Los $\triangle$s ABC y DEF son semejantes, si $\overline{AB} = 6$, $\overline{BC} = 12$, $\overline{DE} = 10$ y $\overline{DF} = 7{,}5$, determine el valor de $\overline{AC} + \overline{EF}$



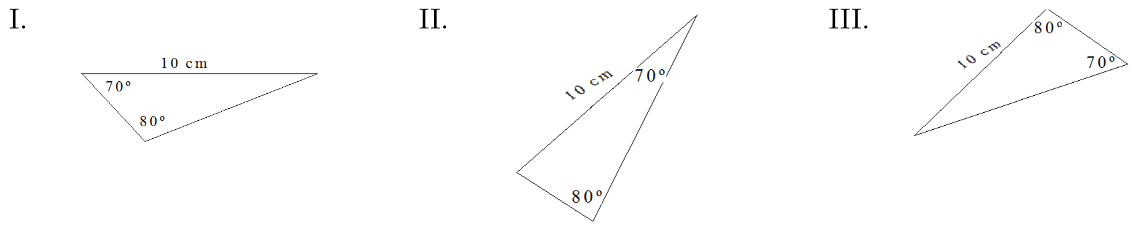
a) 24,5
b) 20,5
c) 18,7
d) 15
e) 1

5. 3 árboles se encuentran alineados como se muestra en la figura, el más pequeño mide 2 m y el mediano 3 m, si la distancia entre cada par de árboles es de 3 m, ¿cuánto mide el árbol más alto?

a) 3 m
b) 3,5 m
c) 4 m
d) 4,5 m
e) 5 m



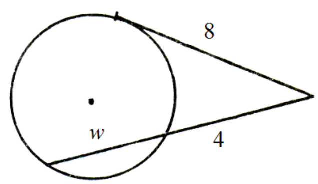
6. ¿Qué $\triangle$s son congruentes?



a) I y II
b) I y III
c) II y III
d) I, II y III
e) Ninguno.

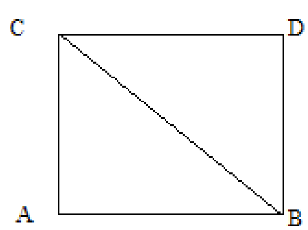
7. En la figura, la tangente es igual a 8, y el segmento exterior de la secante es igual a 4, entonces el valor de w es igual a:

a) 2
b) 4
c) 12
d) 16
e) Ninguna de las anteriores.



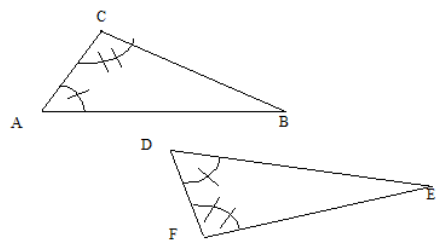
8. Un alumno para demostrar que en el cuadrado de la figura el $\triangle ABC \cong \triangle BCD$ determinó que $\overline{AB} \cong \overline{BD}$, que $\overline{AC} \cong \overline{DC}$ y que el $\measuredangle CAB \cong \measuredangle BDC$, por ser rectos, ¿qué criterio de congruencia utilizó?

a) LLL
b) LAL
c) ALA
d) AAL
e) LLA



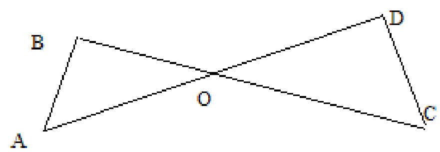
9. En la figura, el $\triangle ABC \cong \triangle DEF$, entonces se verifica que:

a) $\overline{AC} \cong \overline{DF}$
b) $\overline{BC} \cong \overline{DE}$
c) $\overline{AB} \cong \overline{FE}$
d) $\overline{AC} \cong \overline{FE}$
e) $\overline{AB} \cong \overline{FD}$



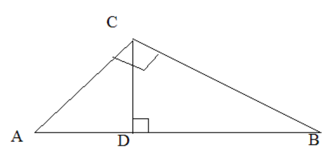
10. Para demostrar que los $\triangle$s AOB y COD de la figura, son congruentes, es necesario saber que:

a) $\overline{AB} \cong \overline{DC}$
b) $\measuredangle BAO \cong \measuredangle DCO$
c) $\overline{AB} \perp \overline{CD}$
d) $\overline{AO} \cong \overline{DO}$ y $\overline{AB} \cong \overline{CD}$
e) $\overline{BO} \cong \overline{CO}$ y $\overline{AO} \cong \overline{DO}$



11. En la figura $\overline{AD} = 3\ m$ y $\overline{AC} = 5\ m$, entonces $\overline{BC} =$

a) $\frac{16}{3}\ m$
b) $\frac{4}{3}\ m$
c) $\frac{20}{3}\ m$
d) $5\sqrt{2}\ m$
e) $(5\sqrt{2} - 3)\ m$



12. Los catetos de un $\triangle$ rectángulo miden 3 cm y 4 cm, determine la proyección mayor de los catetos sobre la hipotenusa.

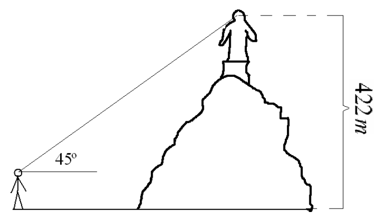
a) 1,8 cm
b) 3,2 cm
c) 4 cm
d) 5 cm
e) 2,5 cm

13. ¿Cuál es el valor de $\text{sen}(30°) + \cos(60°)$?

a) 0
b) $\frac{1}{2}$
c) -1
d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
e) 1

14. Los ojos de la virgen del cerro San Cristobal están a una altura de 422 m como lo muestra la figura, una persona de 2 m de altura la ve directo a los ojos desde Av. Recoleta con un ángulo de inclinación de 45°, ¿cuál es la distancia que separa sus miradas?

a) 840 m
b) $840\sqrt{2}$ m
c) $420\sqrt{2}$ m
d) 420 m
e) Ninguna de las anteriores.



15. ¿Cuál de las siguientes expresiones es(son) equivalente(s) a $\tan(\alpha)$?

I. $\dfrac{\cos(\alpha)}{\text{sen}(\alpha)}$ II. $\sqrt{\dfrac{1-\cos^2(\alpha)}{1-\text{sen}^2(\alpha)}}$ III. $\dfrac{1}{\text{cosec}(\alpha)}\cdot\sec(\alpha)$

a) Solo I
b) Solo II
c) I y II
d) II y III
e) Ninguna de las anteriores.

16. $\text{sen}^2(89)+\text{sen}^2(1)=$

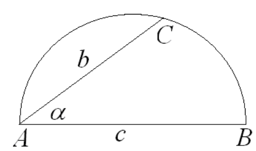
a) 89
b) 1
c) 90
d) 89^2+1
e) No se puede determinar.

17. Un avión próximo a aterrizar, se encuentra a una altura de 1.350 m. ¿A qué distancia del aeropuerto está el avión si el piloto lo observa con un ángulo de depresión de 30°?

a) 1.350 m
b) 2.700 m
c) $90\sqrt{3}$ m
d) $900\sqrt{3}$ m
e) 270 m

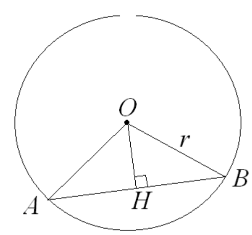
18. En la semi circunferencia de la figura, el valor de $\frac{b}{c}$ es:

a) $\cos(\alpha)$
b) $\text{sen}(\alpha)$
c) $\tan(\alpha)$
d) $\sec(\alpha)$
e) $\text{cosec}(\alpha)$



19. En la figura siguiente, en la circunferencia de centro O y radio r se dibuja el $\triangle ABO$, ¿cuál es el valor de $\overline{OH}$ si el $\measuredangle AOB = 2\alpha$?

a) $2r\sec(\alpha)$
b) $r\,\text{sen}(\alpha)$
c) $r\cos(\alpha)$
d) $2r\,\text{sen}(\alpha)$
e) $2r\cos(\alpha)$



20. Para determinar la altura de un poste, Cristian se ha alejado 7 metros de su base y ha medido el ángulo que forma la visual al punto mas alto del poste, obteniendo un valor de 40°, si Cristian ignora su propia altura, ¿cuál es la altura del poste?

a) $7 \cdot \tan(40°)$
b) $7 \cdot \cos(40°)$
c) $7 \cdot \text{cosec}(40°)$
d) $7 \cdot \cot(40°)$
e) Falta información.

21. Dada la siguiente figura, el valor del seno de β es:

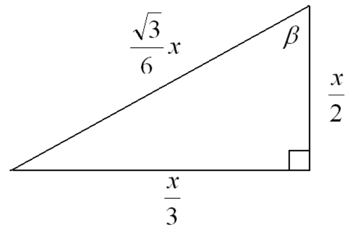
a) 13

b) $\sqrt{3}/3$

c) $6/\sqrt{3}$

d) $\sqrt{3}$

e) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$



22. ¿Cuál es el ancho del río según los datos de la figura?

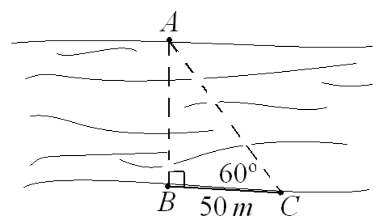
a) $\sqrt{3}/50$

b) $\sqrt{3}$

c) $2/\sqrt{3}$

d) 50

e) $50\sqrt{3}$



Capítulo 11

Transformaciones Isométricas

El estudio de los movimientos en el plano y el espacio han sido muy importantes en nuestra historia, ya que gracias a ellos hemos aprendido a comprender como se comportan los objetos que no somos capaces de darnos cuenta de su movimiento, como por ejemplo el movimiento de las montañas, o de la misma tierra y la galaxia, la mayoría de éstos movimientos son conocidos como isometrías del espacio, pues éstas son funciones del espacio que le asignan a una figura o cuerpo inicial una posición de final, sin alterar la estructura del objeto.

Versión 1.0, Marzo de 2008

11.1. Isometrías

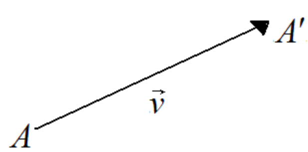
Las transformaciones isométricas son movimientos de figuras en el plano que no alteran ni la forma ni el tamaño de esta. La figura inicial y la final (después de aplicada una isometría) son congruentes.

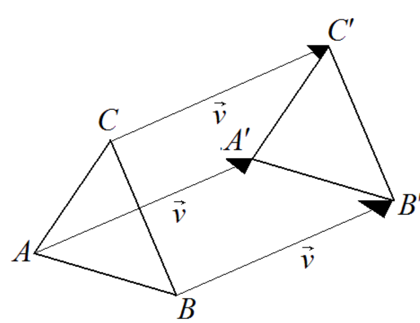
Hay tres isometrías:

- Traslación $T_{\vec{v}}$
- Simetría o Reflexión S_L, S_O ó Ref_L Ref_O
- Rotación $Rot_{(O,\measuredangle)}$

11.1.1. La Traslación

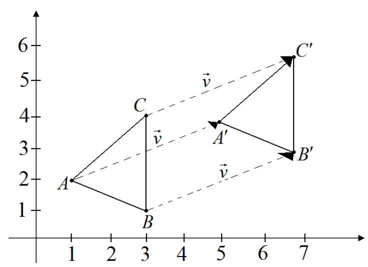
La traslación está determinada por un vector $\vec{v}$ el cual asigna a cada punto A un punto A', de modo que $\vec{AA'}$ es un vector de igual módulo, dirección y sentido que $\vec{v}$.





Veamos en la figura el plano cartesiano, aquí los puntos están determinado como pares ordenados, por ejemplo el punto A tiene coordenadas (1,2) el cual al aplicarle una traslación le corresponde A' de coordenadas (5,4). Como podemos ver A se trasladó 4 unidades a la derecha y 2 unidades hacia arriba (con respecto a A), con esto sabemos que a $A(1,2)$ se le aplicó una traslación $T(4,2)$.

$$A(1,2) + T(4,2) = A'(5,4)$$



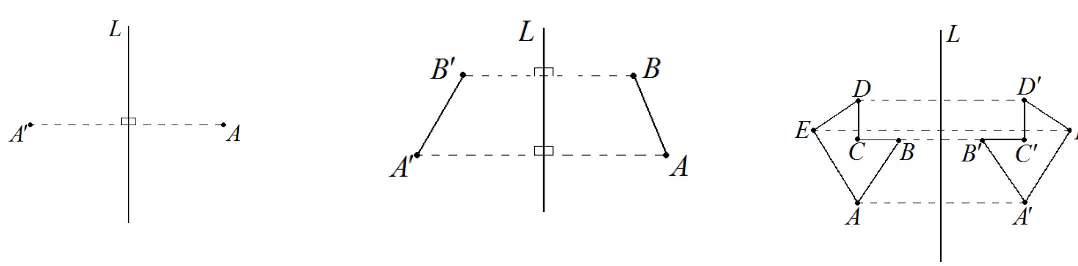
11.1.2. La Simetría o Reflexión

La simetría asigna a cada punto de una figura otro punto del plano llamado imagen. Hay dos tipos de simetrías:

- Axial
- Central

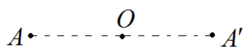
Simetría Axial

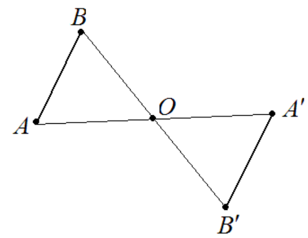
La simetría axial es con respecto a una recta L llamada **eje de simetría**. Cada punto de la figura y la imagen que le corresponde, está a la misma distancia de la recta L. Veamos la figura, el segmento que une A con A' es perpendicular a L.

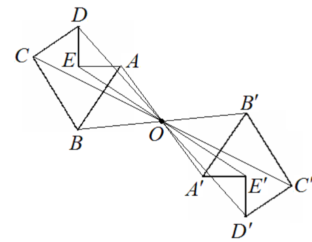


Simetría Central

La simetría central es con respecto a un punto O llamado **centro de simetría**. Cada punto de la figura y la imagen que le corresponde, se encuentran en la misma recta que une el punto con el centro de simetría y a la misma distancia de este. Veamos en las figuras,

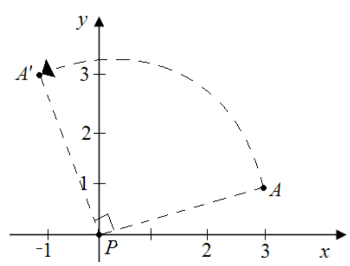




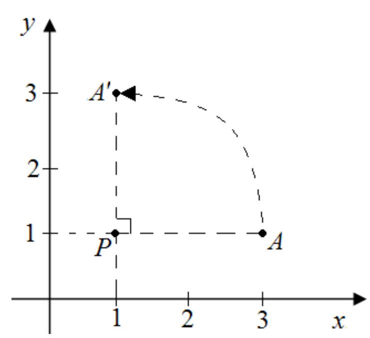


11.1.3. La Rotación

La rotación asocia a cada punto del plano una imagen con respecto a un punto llamado **centro de rotación** y un ángulo llamado **ángulo de giro**. Veamos en la figura, haremos una $RotA_{(0,\measuredangle 90^\circ)}$ donde $A(3,1)$ y $A'(-1,3)$.



Veamos la otra figura, haremos una $RotA_{((1,1),\measuredangle 90^\circ)}$ ó $RotA_{(P,\measuredangle 90^\circ)}$ donde $A(3,1)$ y $A'(1,3)$.

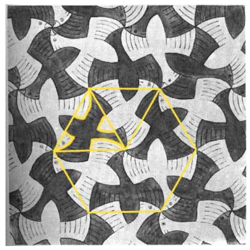


$\diamondsuit$ *Observa que . . .*

La simetría central es equivalente a una rotación respecto al mismo centro en 180°.

11.2. Teselaciones

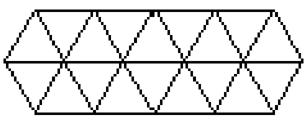
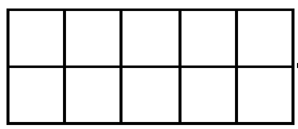
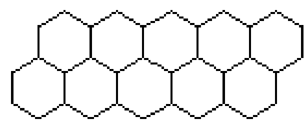
Teselar o embaldosa consiste en recubrir el plano con figuras que se repiten de modo que al unir las figuras se cubre completamente el plano.



11.2.1. Teselación Regular

Es el recubrimiento del plano con polígonos regulares y congruentes. Son solo tres los polígonos que embaldosan el plano Euclidiano:

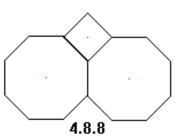
- Triángulo Equilátero
- Cuadrado
- Hexágono Regular

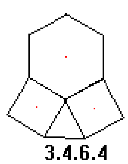
  

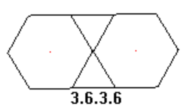
Si teselamos con cuadrados estos quedan perfectamente alineados, no así con los triángulos y los hexágonos ya que estos se ensamblan no alineados.

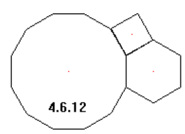
11.2.2. Teselación Semi-regular

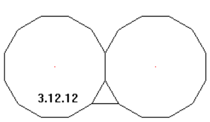
Está formada por polígonos regulares de manera que la unión de ellas es idéntica en cada vértice. Las siguientes ocho figuras, son las únicas combinaciones de polígonos regulares que nos permiten teselar completamente el plano.

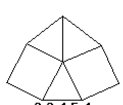


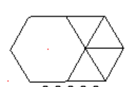












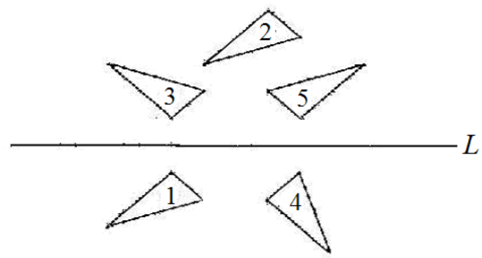
11.3. Mini Ensayo XIV Isometrías

1. Cuántos ejes de simetría tiene la figura:

a) 0
b) 1
c) 2
d) 3
e) 4

2. Los triángulos 2, 3, 4 y 5 han sido obtenidos a partir del triángulo 1, ¿cuál de ellos corresponde a una reflexión axial del triángulo 1?

a) $\triangle 2$
b) $\triangle 3$
c) $\triangle 4$
d) $\triangle 5$
e) Ninguno.

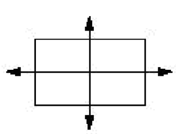


3. De la pregunta anterior, ¿cuál de los triángulos ha sido producto de una traslación del triángulo 1?

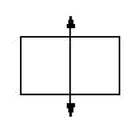
a) $\triangle 2$
b) $\triangle 3$
c) $\triangle 4$
d) $\triangle 5$
e) Ninguno.

4. ¿Qué figura muestra todos los ejes de simetría de un rectángulo?

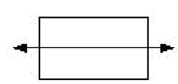
a)



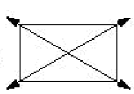
b)



c)



d)



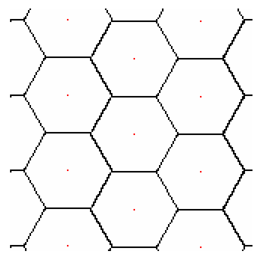
e) Ninguna de las anteriores.

5. Una circunferencia tiene como centro el punto (3,5), si la figura se traslada según el vector $(-5, 1)$, el nuevo centro de la circunferencia será:

a) $(-2{,}6)$
b) $(8{,}6)$
c) $(-2{,}4)$
d) $(-15{,}5)$
e) $(8{,}4)$

6. La siguiente figura puede ser construida mediante los movimientos:

I. Simetría
II. Rotación
III. Traslación



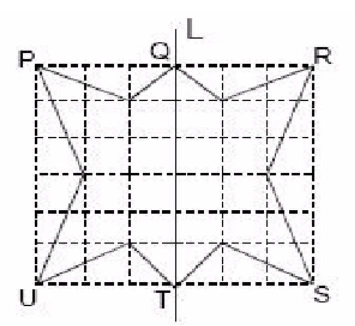
a) I
b) II
c) III
d) II y III
e) I, II y III

7. ¿Cuál de las siguientes letras de nuestro alfabeto NO tiene ningún eje de simetría?

a) C
b) M
c) A
d) R
e) X

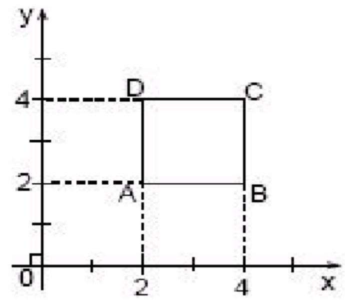
8. ¿Cuál de los siguientes puntos representa el lugar donde irá a parar P por medio de una reflexión respecto a L?

a) Q
b) R
c) S
d) T
e) U



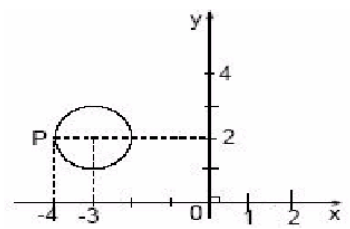
9. ¿Cuál serán las nuevas coordenadas del punto C luego de aplicarle al cuadrado $ABCD$ una $Rot_{(A,180^\circ)}$?

a) (2,4)
b) (2,2)
c) (4,2)
d) (1,1)
e) (0,0)



10. ¿Cuáles serán las coordenadas del punto P luego de aplicarle a la circunferencia de centro $(-3{,}2)$ y radio 1, una traslación respecto al vector $\vec{v}(4,-1)$?

a) (0,1)
b) (1,0)
c) (1,1)
d) (0,0)
e) (2,1)



11. ¿Cuál de las siguientes alternativas no corresponde a una transformación isométrica?

a) Traslación
b) Reflexión
c) Simetría
d) Rotación
e) Permutación

Capítulo 12

Cuerpos Geométricos

Versión 1.0, Febrero de 2008

1. Poliedros: Son cuerpos que estan limitados por polígonos. Estos son:

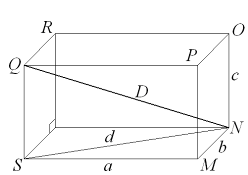
    - Prisma
        - Cubo
        - Paralelepípedo
        - Prisma
    - Pirámide

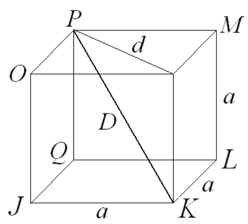
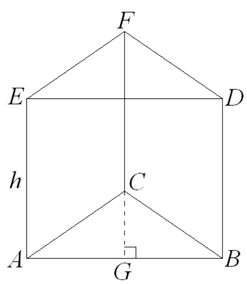
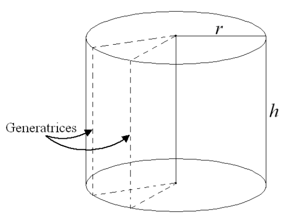
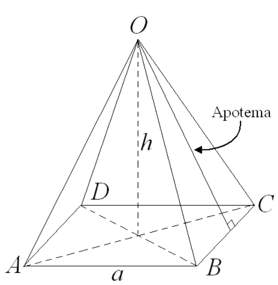
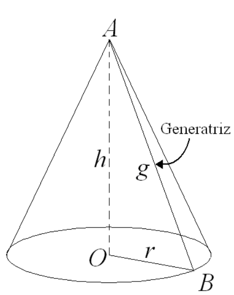
2. Redondos: Estos son:

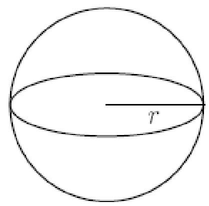
    - Cilindro
    - Cono
    - Esfera

12.1. Superficie y Volumen

Superficie: Es el área total que se obtiene de la suma de las áreas de los lados del cuerpo.
Volumen:

Figura	**Nombre**	**Claves**	**Superficie**	**Volumen**
	**Paralelepípedo**	h=altura	$2ab+2bc+2ac$	$a \cdot b \cdot c$

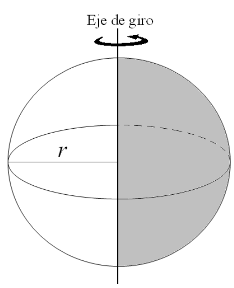
	**Cubo**	a=lado	$6a^2$	a^3
	**Prisma**	H=altura	$3ab + ha$	$\frac{b \cdot h}{2}H$
	**Cilindro**	h=altura r=radio	$2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$	$\pi r^2 \cdot h$
	**Pirámide**	h=altura g=apotema lateral	$a^2 + 2ag$	$\frac{1}{3}a^2\dot{h}$
	**Cono**	h=altura r=radio	$\pi r^2 + \pi rg$	$\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$

	**Esfera**	r=radio	$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$

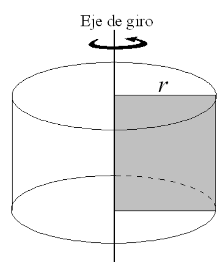
12.2. Cuerpos de Revolución

Estos se obtienen haciendo girar una superficie plana alrededor de un eje.

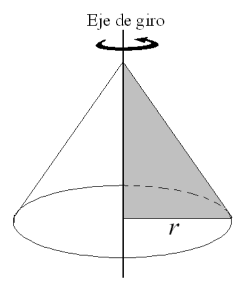
Esfera



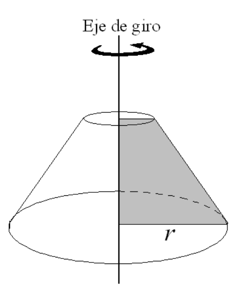
Cilindro



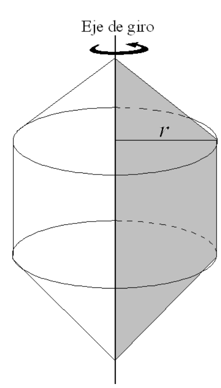
Cono



Tronco de Cono

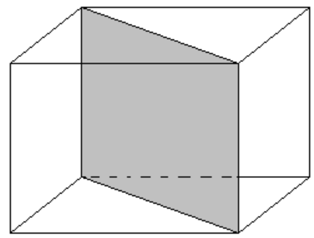


Cono con dos Pirámides



♣ **Actividad 12.1.**

Responde las siguientes preguntas, referentes al cubo de la figura de lado 2 cm.



1. *¿Cuál es el perímetro del rectángulo sombreado?*
2. *¿Cuál es el área del rectángulo sombreado?*
3. *¿Cuál es el perímetro del cubo?*
4. *¿Cuál es la superficie del cubo?*
5. *¿Cuál es el volumen del cubo?*

Capítulo 13

Probabilidad y Estadística

Históricamente el hombre ha querido saber que es lo que le prepara el destino, conocer el futuro para poder prepararse, y hasta el día de hoy no hemos logrado tener un proceso científico que nos sirva para este objetivo tal como nos gustaría. Sin embargo nos hemos acercado bastante a conocer lo que nos tocará más adelante a través de la experiencia y del análisis de las posibilidades que existen aprovechando lo que llamamos probabilidades. Sin embargo para poder tener mayor fineza en nuestras "premoniciones" ha sido necesario conocer, organizar y analizar los datos de los acontecimientos anteriores, a la materia que se preocupa de esto la conocemos como estadística.

Versión 1.0, Febrero de 2008

13.1. Probabilidad

La probabilidad nos sirve para medir la frecuencia con que ocurre un resultado de entre todos los posibles en algún experimento.

13.1.1. Espacio Muestral

El espacio muestral[1] es un conjunto formado por todos los resultados posibles de algún experimento, por ejemplo, si lanzamos una moneda al aire (a esto llamamos experimento), existen solo 2 posibilidades, que salga cara o que salga sello. Por lo tanto el espacio muestral en este caso es un conjunto de dos elementos.

$$\mathcal{S}_{\text{moneda}} = \{\text{que salga cara, que salga sello}\}$$

Si en lugar de una moneda, lanzamos un dado entonces el espacio muestral tendra seis elementos, uno correspondiente a cada cara del dado:

$$\mathcal{S}_{\text{dado}} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Y si lanzamos el dado y la moneda al mismo tiempo el espacio muestral estará conformado por pares ordenados de la forma:

$$\mathcal{S}_{\text{moneda+dado}} = \left\{ \begin{array}{c} (\text{cara}, 1), (\text{cara}, 2), (\text{cara}, 3), (\text{cara}, 4), (\text{cara}, 5), (\text{cara}, 6), \\ (\text{sello}, 1), (\text{sello}, 2), (\text{sello}, 3), (\text{sello}, 4), (\text{sello}, 5), (\text{sello}, 6) \end{array} \right\}$$

[1] Lo abreviamos simplemente como $\mathcal{S}$.

Notemos que:

$$\#\mathcal{S}_{\text{moneda+dado}} = \#\mathcal{S}_{\text{moneda}} \cdot \#\mathcal{S}_{\text{dado}}$$

Esto no es una casualidad, ya que cada ves que llevamos a cabo más de un experimento la cardinalidad del nuevo espacio muestral es igual al producto de las cardinalidades de los espacios muestrales de los experimento por separado, siempre que éstos sean independientes.

13.1.2. Evento o Suceso

Cuando realizamos un experimento puede que exista más de una caso favorable para mis objetivos, por ejemplo en un juego de ludo para sacar una pieza de la "capacha", necesito obtener del lanzamiento de un dado un 6 o un 1, en este caso el conjunto formado por el 1 y el 6, es decir {1,6} es el llamado evento o suceso[2].

Un evento es un subconjunto del espacio muestral.

♠ Veamos algunos ejemplos de eventos al lanzar un dado:

1. Que no salga un número par, en este caso $\mathcal{E} = \{1, 3, 5\}$
2. Que no salga 2, en este caso $\mathcal{E} = \{1, 3, 4, 5, 6\}$
3. Que salga un número primo, en este caso $\mathcal{E} = \{2, 3, 5\}$

Existen relaciones entre los sucesos:

1. **Sucesos Excluyentes**

   Dos o más sucesos serán excluyentes si solo uno de ellos puede ocurrir en un experimento, por ejemplo al lanzar una moneda, si sale cara entonces no puede salir sello y viceversa, por lo tanto estos sucesos son excluyentes.

2. **Sucesos Independientes**

   Dos o más sucesos son independientes cuando la ocurrencia de uno, no afecta la ocurrencia del o los otros. Por ejemplo en el lanzamiento del dado y la moneda si sale cara o sale sello, no afecta en ninguna medida el número que salga en el dado, por lo tanto estos sucesos son independientes.

3. **Sucesos Dependientes**

   Dos o más sucesos son dependientes cuando la ocurrencia de alguno de ellos si afecta la ocurrencia de los otros. Por ejemplo si tengo un saco con 2 bolas negras y una bola roja, el suceso de sacar la bola roja me impedirá sacra una bola roja en el siguiente intento pues en el saco solo hay bpolas negras, en este caso esos sucesos son dependientes.

13.1.3. Probabilidad a Priori

La probabilidad a priori es aquella que puedo determinar solo conociendo todos los casos posibles de un experimento, es decir, cuando conozco $\mathcal{S}$.

La probabilidad de que ocurra un suceso es igual a la razón entre la cantidad de casos favorables, es decir $\#\mathcal{E}$, y la cantidad de casos posibles, es decir $\#\mathcal{S}$. Por lo tanto se tiene:

$$\mathcal{P}_{\text{priori}} = \frac{\text{N}^\circ \text{ de casos favorables}}{\text{N}^\circ \text{ de casos posibles}} = \frac{\#\mathcal{E}}{\#\mathcal{S}}$$

[2]Lo abreviamos simplemente como $\mathcal{E}$

La probabilidad es siempre un valor entre 0 y 1 cuando la expresamos en forma fraccionaria o decimal, pero puede tomar un valor entre 0 % y 100 % cuando le hacemos su correspondencia con el porcentaje[3], esto ocurre por que en la fracción que se efectúa, el numerador es siempre menor o en su defecto igual que el denominador ya que es imposible tener más casos favorables que casos posibles.

Si un evento o suceso tiene una probabilidad de 1 o 100 % se dice que es un *suceso seguro*, si a diferencia un evento tiene probabilidad 0 o 0 % se dice que es un *suceso imposible*.

Veamos algunos ejemplos :

♠ **Ejemplo 1**

¿Cual es la probabilidad a priori de que al lanzar un dado, salga un número par?.

Respuesta

Ya conocemos el espacio muestral de este experimento, es $\mathcal{S}_{\text{dado}} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, y los casos favorables para que ocurra este suceso son $\mathcal{E}_{\text{N}^\circ\text{par}} = \{2, 4, 6\}$, por lo tanto la probabilidad de que ocurra este suceso es:

$$\mathcal{P}_{\text{que se par}} = \frac{\#\mathcal{E}_{\text{N}^\circ\text{par}}}{\#\mathcal{S}_{\text{dado}}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\,\%$$

♠ **Ejemplo 2**

¿Cual es la probabilidad a priori de que al sacar una bola de un saco que tiene 3 bolas rojas y 2 verdes, saque una bola verde?.

Respuesta

El espacio muestral de este experimento está conformado por las cinco posibilidades que pueden ocurrir, en tres de ellas podria sacar una bola roja y solo en dos una verde, por lo tanto el espacio muestral tiene 5 elementos y el suceso esta compuesto de 2 elementos, es decir:

$$\mathcal{P}_{\text{que se verde}} = \frac{\#\mathcal{E}_{\text{N}^\circ\text{verdes}}}{\#\mathcal{S}_{\text{N}^\circ\text{bolas}}} = \frac{2}{5} = 0,4 = 40\,\%$$

13.1.4. Probabilidad a Posteriori o Frecuencial

La probabilidad a posteriori o frecuancial es aquella que podemos determinar despues de realizar un experimento muchas veces, es decir, es la que podemos calcular a partir de la experiencia.

La manera de calcularla, es realizando n experimentos (en lo posible n debe ser muy grande), y contando la cantidad de veces que suceda el evento que deseo (llamemos a esa cantidad m). Entonces, la probabilidad frecuencial de que en un nuevo intento del experimento ocurra nuevamente el mismo suceso será:

$$\mathcal{P}_{\text{frecuencial}} = \frac{\text{N}^\circ\text{casos favorables}}{\text{N}^\circ\text{experimentos}} = \frac{m}{n}$$

Los valores que puede tomar la probabilidad fecuencial son los mismos que en la probabilidad a priori.

[3]Ver página 31

Veamos algunos ejemplos :

♠ **Ejemplo 1**

Cristian a esperado el bus `Q-348eW53*z` en el paradero los últimos 30 días, en 5 oportunidades la micro pasó antes de los 45 minutos, pero en el resto de los días comenzó a caminar después de pasado ese tiempo. ¿Cuál es la probabilidad de que mañana Cristian tome la micro para llegar al PreU a tiempo?.

Respuesta

La cantidad de experimentos es 30 (los días que espero la micro), y los casos favorables son solo 5 (los días que paso la micro), en éstos casos la probabilidad que se calcula es siempre la probabilidad frecuencial, que en este caso es:

$$\mathcal{P}_{\text{que mañana pase la micro}} = \frac{\#\mathcal{E}_{\text{N°veces que paso}}}{\#\mathcal{S}_{\text{N°días que espero}}} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} = 0,167 = 16,7\,\%$$

♠ **Ejemplo 2**

Gonzalo a comprado pan en el negocio de su casa todos los días hace 4 semanas, y en una ocasión el pan que compró estaba duro. ¿Cuál es la probabilidad de que cuando vuelva a comprar pan, éste esté blando?.

Respuesta

La cantidad de experimentos es 28 (los días de las 4 semanas), y los casos favorables para Gonzalo son 27 (pues en solo una ocación el pan estaba duro), por lo tanto la probabilidad frecuencial de que ocurra el suceso es:

$$\mathcal{P}_{\text{que haya pan blando}} = \frac{\#\mathcal{E}_{\text{N°veces que estaba blando}}}{\#\mathcal{S}_{\text{N°días que compro pan}}} = \frac{27}{28} == 0,964 = 96,4\,\%$$

13.1.5. Ley Aditiva de las Probabilidades

En algunas ocaciones nos van a preguntar por la probabilidad de que ocurra uno u otro evento, cuando éstos eventos son **excluyentes**, la probabilidad de que ocurra uno u otro es la suma de las probabilidades de que ocurra cada uno por separado, dicho de otra manera:

Sean $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ dos eventos mutuamente excluyentes para un mismo experimento, y $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ las probabilidades de ocurrencia de cada uno respectivamente, entonces la probabilidad de que ocurra $\mathcal{E}_1$ o $\mathcal{E}_2$ será:

$$\mathcal{P}_{1\text{ o }2} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2$$

♠ **Ejemplo**

¿Cual es la probabilidad de que al sacar una bola de un saco que contiene 3 bolas amarillas, 3 rojas y 4 verdes, saque una bola amarilla o una verde?.

Respuesta

Entre el suceso de sacar una bola amarilla (llamémoslo $\mathcal{E}_a$), y el sacar una bola verde (llamémoslo $\mathcal{E}_v$), podemos darnos cuenta que son mutuamente excluyentes, pues si ocurre uno, no puede ocurrir el otro, entonces podemos ocupar la ley aditiva, por lo tanto veamos las probabilidades de cada uno:

$$\text{La probabilidad que sea amarilla} \quad \rightarrow \quad \mathcal{P}_a = \frac{\#\mathcal{E}_a}{\#\mathcal{S}} = \frac{3}{10} = 0{,}3 = 30\,\%$$
$$\text{La probabilidad que sea verde} \quad \rightarrow \quad \mathcal{P}_v = \frac{\#\mathcal{E}_v}{\#\mathcal{S}} = \frac{4}{10} = 0{,}4 = 40\,\%$$

Así, la probabilidad ($\mathcal{P}_t$), de que al sacar una bola, ésta sea amarilla o verde será:

$$\mathcal{P}_t = \mathcal{P}_v + \mathcal{P}_a = 40\,\% + 30\,\% = 70\,\%$$

13.1.6. Ley Multiplicativa de las Probabilidades

En algunas ocaciones nos van a preguntar por la probabilidad de que ocurran dos sucesos al mismo tiempo, cuando éstos eventos son **independientes**, la probabilidad de que ocurra uno y otro es producto de las probabilidades de que ocurra cada uno por separado, dicho de otra manera:

Sean $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ dos sucesos independientes , y $\mathcal{P}_1$ y $\mathcal{P}_2$ las probabilidades de ocurrencia de cada uno respectivamente, entonces la probabilidad de que ocurra $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ será:

$$\mathcal{P}_{1 \text{ y } 2} = \mathcal{P}_1 \cdot \mathcal{P}_2$$

♠ **Ejemplo**

Cristian está en un concurso de televisión, tiene frente a él tres cajas, la caja 1 contiene 4 bolitas blancas y una bolita negra, la caja 2 contiene 2 bolitas blancas y 4 negras, y la caja 3 contiene 3 bolitas blancas y 1 negra, si Cristian saca de cada caja una bola blanca se llevará un auto 0 km, para llegar a tiempo al PreU. ¿Cual es la probabilidad de que Cristian gane el concurso?.

Respuesta

Cada ves que Cristian saque una bola de una caja será un experimento distinto, por lo tanto entre los eventos de sacar una bolita blanca en cada caja no tienen ninguna relación, es decir no influirá un evento en el otro, por lo tanto sabemos que éstos eventos son independientes, así, podemos ocupar la ley multiplicativa:

$$\text{La probabilidad que sea blanca en la caja 1} \quad \rightarrow \quad \mathcal{P}_1 = \frac{\#\mathcal{E}_1}{\#\mathcal{S}_1} = \frac{4}{5} = 0{,}8 = 80\,\%$$
$$\text{La probabilidad que sea blanca en la caja 2} \quad \rightarrow \quad \mathcal{P}_2 = \frac{\#\mathcal{E}_2}{\#\mathcal{S}_2} = \frac{2}{6} = 0{,}334 = 30{,}4\,\%$$
$$\text{La probabilidad que sea blanca en la caja 3} \quad \rightarrow \quad \mathcal{P}_3 = \frac{\#\mathcal{E}_3}{\#\mathcal{S}_3} = \frac{3}{4} = 0{,}75 = 75\,\%$$

De ésta manera la probabilidad ($\mathcal{P}_t$), de que saque una bola blanca de todas las cajas será:

$$\mathcal{P}_t = \mathcal{P}_1 \cdot \mathcal{P}_2 \cdot \mathcal{P}_3 = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{12}{5 \cdot 12} = \frac{1}{5} = 0{,}2 = 20\,\%$$

Existen casos en que en dos sucesos dependientes también podemos ocupar la ley multiplicativa, pero teniendo mucho cuidado, pues al ser dependientes, cuando ocurre uno cambiarán las condiciones del problema para el segundo suceso, en general, cambiará el espacio muestral, por ejemplo.

♠ **Ejemplo**

Si tenemos un naipe inglés[4], ¿cuál es la probabilidad de sacar una carta de diamante y luego una de corazón.?

Respuesta

Como podrás darte cuenta estos sucesos son dependientes pues la probabilidad de sacar una carta de pica es:

$$\mathcal{P}_{\diamondsuit} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

Sin embargo el sacar una carta del naipe implica que el espacio mustral (el conjunto formado por las 52 posibilidades de cartas a sacar), a cambiado, pues es imposible sacar la carta que ya sacamos, por lo tanto si es que la carta que se sacó fue un diamante entonces la probabilidad de sacar ahora un corazón será:

$$\mathcal{P}_{\heartsuit} = \frac{13}{51}$$

Por lo tanto la probabilidad ($\mathcal{P}_t$), de sacar un diamante **y** luego un corazón será:

$$\mathcal{P}_t = \mathcal{P}_{\diamondsuit} \cdot \mathcal{P}_{\heartsuit} = \frac{1}{4} \cdot \frac{13}{51} = \frac{13}{204} = 0{,}064 = 6{,}4\,\%$$

♣ *Actividad 13.1.*

I. *En el cumpleaños de Gonzalo una piñata contiene 80 masticables, 20 bombones,30 gomitas, y 70 caramelos, si cuando Gonzalo rompe la piñata logras agarrar algo de ella, calcula la probabilidad de que sea:*

1. *Un caramelo*
2. *Un masticable*
3. *Una gomita*
4. *Un caramelo o una gomita*
5. *Una gomita o un masticable*
6. *Un dulce*
7. *Un bombón*
8. *Un bombón o una gomita*
9. *Un helado*

II. *Una caja posee 2 bolitas blancas, 3 bolitas rojas y 4 bolitas negras, si sacas bolitas de a una sin reponerlas, calcula la probabilidad de sacar:*

1. *Una blanca*
2. *Una blanca y luego una negra*
3. *Una roja y luego una negra*
4. *Una negra y luego dos blancas*
5. *Dos negras*
6. *Dos negras y dos rojas*

---

[4]Naipe de 52 cartas, con 13 cartas de cada una de sus 4 pintas; ♣ trebol, ♠ pica, ♢ diamante y ♡ corazón.

13.2. Estadística

La estadística es una materia dedicada al recopilación, organización, estudio, y análisis de datos. La finalidad de la estadística es lograr tomar mejores decisiones ya que éstas están de acuerdo con el análisis estadístico de algún hecho particular.

13.2.1. Algunos Conceptos Previos

Población o Universo : Es el grupo completo de individuos u objetos de los cuales se estudian por medio de la estadística sus características o comportamientos.

Muestra : Es un subconjunto del universo que se considera representativo de la población y es el que realmente se estudia, el tipo de estadística que estudia a una muestra de manera que los resultados de los análisis son válidos para la población por completo, se denomina **estadística inductiva**, la estadística que estudia a un grupo dado por completo y analiza los datos de todos los individuos (puede considerarse que la muestra sería todo el universo), se denomina **estadística deductiva**.

Es ésta última la que estudiaremos en este capítulo.

Frecuencia de clase : Cuando existen muchos datos estadísticos se hace necesario agruparlos entre los que tienen alguna carcterística en común, a éstos grupos se les denomina **clases** y la frecuencia de clases es la cantidad de datos que tiene una determinada clase.

Distribución de frecuencias : Es una tabla que que contiene los nombres de las clases y sus respectivas frecuencias de clase.

13.2.2. Medidas de Tendencia Central

1. **La Moda**

   En un conjunto de datos estadísticos el valor el elemento que se repite más veces es conocido como moda, la moda puede no existir en el caso de que no haya repeticiones de algún dato o que todos se repitan la misma cantidad de veces. En el caso que la moda exista puede no ser única pues puede haber una cantidad menor de elementos del total que se repitan la misma cantidad de veces.

   - ♠ Ejemplo 1

     En el conjunto $\{a, f, c, d, e, b, a, d, a\}$ la moda es a, pues se repite 3 veces.

   - ♠ Ejemplo 2

     En el conjunto $\{\alpha, \gamma, \delta, \beta, \alpha, \delta, \varepsilon, \mu\}$ las modas son α y δ, pues ambas se repiten 2 veces.

   - ♠ Ejemplo 3

     En el conjunto {1,1,2,2,3,3,4,4,5,5,6,6} no existen modas.

2. **La Mediana**

   En un conjunto ordenado[5] de datos estadísticos el elemento que se encuentra en la posición central es conocido como mediana, en el caso que no exista una posición central (cuando hay una cantidad par de elementos), la mediana será el promedio entre los dos valores centrales.

[5]En el caso que un conjunto no esté ordenado debes ordenarlo para encontrar la mediana

♠ Ejemplo 1

En el conjunto ordenado {0,1,1,2,3,6,8} la mediana es 2, pues se ocupa la posición central.

♠ Ejemplo 2

En el conjunto ordenado $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ no existe posición central pues hay 6 elementos, en este caso le mediana será el promedio entre 3 y 4, es decir $\frac{3+4}{2} = 3{,}5$.

3. La Media Aritmética

En un conjunto de datos estadísticos la media aritmética (lo abreviamos como $\overline{x}$), es el promedio entre todos los datos, es decir. Sea un conjunto $\{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n\}$ de n elementos, el promedio será:

$$\overline{x} = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_n}{n}$$

♠ Ejemplo 1

En el conjunto $\{5, 4, 8, 3, 1, 1, 6\}$ el promedio será:

$$\overline{x} = \frac{5+4+8+3+1+1+6}{7} = \frac{28}{7} = 4$$

♠ Ejemplo 2

En el conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ el promedio será:

$$\overline{x} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

♣ *Actividad 13.2.*

Encuentra la moda, la mediana y la media aritmética de los siguientes conjuntos:

1.	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$	*5.*	$\{12, 56, 80, 12, 3, 4, 56\}$
2.	$\{-3, -1, 1, 3, 5, -1\}$	*6.*	$\{10^{-1}, 10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4\}$
3.	$\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{9}{5}\}$	*7.*	$\{\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, \sqrt{2}, 7\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$
4.	$\{-3\pi, -2\pi, \pi, \frac{2}{3}\pi, \pi\}$	*8.*	$\{6, 3, 1, 3, 6\}$

13.2.3. Representación de los Datos Estadísticos

1. A través de una distribución de frecuencias

También se conoce como tabla de frecuencias, es cuando los datos estadísticos vienen tabulados como en el ejemplo siguiente:

♠ Ejemplo, la siguiente tabla muestra las notas que se sacaron 45 alumnos de un curso en su última prueba:

Nota	N°de alumnos
1	2
2	4
3	7
4	10
5	15
6	5
7	2

Observa que en este caso las clases son las notas y las frecuencias de clase son la cantidad de alumnos.

El conjunto de datos estadísticos que nos dice ésta tabla es el siguiente:

$$\{\underbrace{1,1}_{\text{2 veces}},\underbrace{2,2,2,2}_{\text{4 veces}},\underbrace{3,3,3,3,3,3,3}_{\text{7 veces}},\underbrace{4,4,4,4,4,4,4,4,4,4}_{\text{10 veces}},$$
$$\underbrace{5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5,5}_{\text{15 veces}},\underbrace{6,6,6,6,6}_{\text{5 veces}},\underbrace{7,7}_{\text{2 veces}}\}$$

Aquí podemos determinar que la moda es 5, la mediana es 4, y que el promedio será.

$$\overline{x}=\frac{1\cdot 2+2\cdot 4+3\cdot 7+4\cdot 10+5\cdot 15+6\cdot 5+7\cdot 2}{45}=\frac{190}{45}=4,\overline{2}\sim 4{,}22$$

2. A través de un gráfico de barras

También conocido como histograma, es cuando los datos estadísticos vienen entregado con un gráfico como el siguiente:

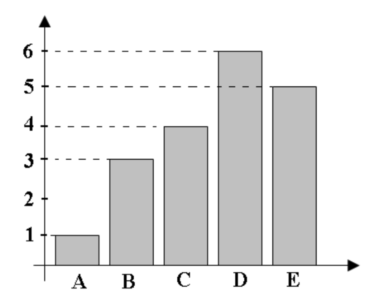


Figura 13.1: Histograma

Los datos que nos entrega el histograma son:

$$\{\underbrace{A}_{\text{1 vez}},\underbrace{B,B,B}_{\text{3 veces}},\underbrace{C,C,C,C}_{\text{4 veces}},\underbrace{D,D,D,D,D,D}_{\text{6 veces}},\underbrace{E,E,E,E,E}_{\text{5 veces}}\}$$

En éste caso podemos determinar la moda que es D y la mediana D, la media aritmética solo puede calcularse en conjuntos numéricos.

3. A través de un polígono de frecuencias

También es un tipo de gráfico, representa lo mismo que un histograma pero no con barras, más bien con coordenadas que se unen con una línea recta, es usado para estudiar las razones de cambio de entre las frecuencias de cada clase, pues mientras mayor sea la inclinación de una de las rectas mayor será la razón de cambio entre las clases que la limitan.

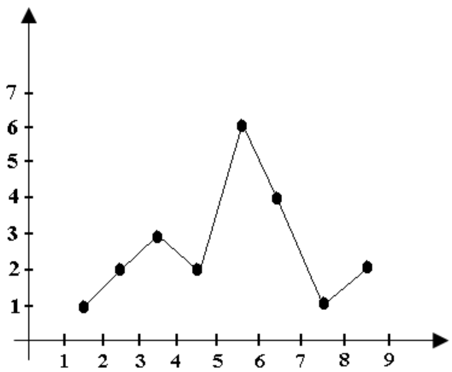


Figura 13.2: Poligono de Frecuencias

Los datos estadísticos los podemos representar en una distribución de frecuencias en donde las clases serán rangos:

Rango	Frecuencia
1–2	1
2–3	2
3–4	3
4–5	2
5–6	6
6–7	4
7–8	1
8–9	2

4. A través de un gráfico circular

También es un tipo de gráfico, donde cada clase es una de las partes de un círculo y su frecuencia viene representada por el porcentaje que esa parte es del círculo.

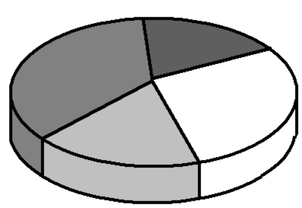
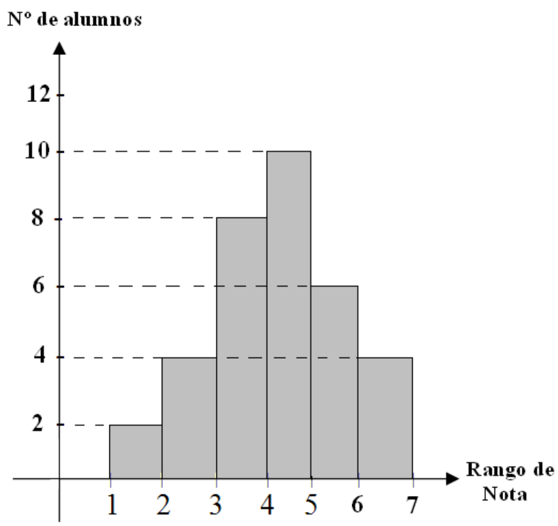


Figura 13.3: Gráfico Circular

♣ *Actividad 13.3.*

De acuerdo con el siguiente gráfico:



Responder si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

1. ____ *La mayoría de los alumnos obtuvo entre un 3 y un 4.*
2. ____ *La moda es sacarse entre un 4 y un 5.*
3. ____ *En total hay 34 alumnos.*
4. ____ *6 alumnos se sacaron entre un 3 y un 4.*
5. ____ *4 alumnos obtuvieron la nota máxima.*

13.3. Mini Ensayo XV Probabilidad y Estadística

1. Cristian fue al hipódromo y le gustaron dos caballos, el primero tiene una probabilidad de perder de 5/8 y el segundo una probabilidad de ganar de 1/3. ¿Qué probabilidad tiene Cristian de ganar si apuesta a los dos caballos?

   a) 17/24
   b) 1/8
   c) 31/24
   d) 5/12
   e) No se puede determinar.

2. La mediana entre los valores 5, 8, 13, 8, 6, 8, 10, 12, 8, corresponde a:

   a) 5

b) 6
c) 8
d) $8,\overline{6}$
e) Ninguna de las anteriores.

3. En la serie de números 2, 4, 4, 5, 5, 5, 17, el valor de la moda es (son):

a) 2 y 17
b) 4
c) 5
d) 4 y 5
e) 6

4. Queremos construir un gráfico circular que indique la cantidad de veces que ha salido cada vocal en la página de un libro. ¿Cuántos grados del gráfico circular le corresponden a la letra "a"?

a) 10°
b) 12°
c) 60°
d) 120°
e) 150°

Vocales	Frecuencia
a	10
e	13
i	4
o	2
u	1

5. En una muestra aleatoria de 120 pacientes, se encontró que 30 de ellos tienen diabetes. ¿Cuál es la probabilidad de que un paciente elegido al azar no tenga diabetes?

a) 25 %
b) 45 %
c) 60 %
d) 75 %
e) 85 %

6. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzarse dos dados se obtenga una suma que no supere a 10?

a) 11/12
b) 7/15
c) 11/15
d) 9/17
e) 11/17

7. En una bolsa se colocan 10 fichas numeradas del 1 al 10. Si se extrae sin mirar al interior de la bolsa una ficha, ¿cuál es la probabilidad de que ella indique un número primo?

a) 2/5

b) 1/2

c) 9/10

d) 4/5

e) 3/5

8. ¿Cuál es la probabilidad de obtener tres números unos al lanzar tres dados?

   a) $\frac{1}{18}$

   b) $\frac{3}{18}$

   c) $\frac{1}{216}$

   d) $\frac{3}{216}$

   e) Ninguna de las anteriores.

9. Se lanza una moneda 3 veces, ¿cuántos elementos tiene el espacio muestral?

   a) 3

   b) 6

   c) 8

   d) 9

   e) 27

10. Un saco tiene dos bolitas rojas y tres verdes, ¿cuál es la probabilidad de sacar una bolita roja y luego, sin reponerla, sacar una verde?

    a) 100 %

    b) 10 %

    c) 24 %

    d) 40 %

    e) 30 %

11. De acuerdo con el gráfico adjunto, la moda y la mediana son respectivamente:

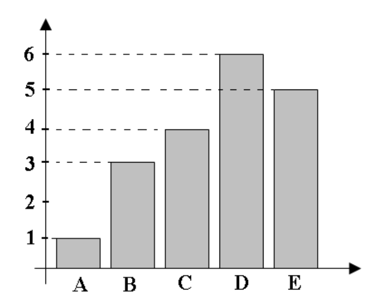
    a) C y D

    b) D y C

    c) C y C

    d) D y D

    e) D y E



12. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar un dado 4 veces, no se obtenga ningún 6?

    a) 0

    b) 1/1296

c) 10/3

d) 2/3

e) 625/1296

13. En la tabla adjunta se muestran las notas obtenidas por un curso en un examen de matemática.

Nota	1	2	3	4	5	6	7
Alumnos	2	3	5	8	12	10	5

Según ésta información, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es (son) correctas?

I. El curso tienen 45 alumnos

II. La moda es 12

III. La mediana es 4

a) Solo I

b) Solo II

c) Solo I y II

d) Solo I y III

e) I, II y III

14. Se sabe que las estaturas de dos personas son, 1,70 m y 1,80 m, respectivamente, entonces es correcto señalar que:

I. El promedio entre las estaturas es 1,75 m

II. La mediana es igual al promedio

III. No existe moda

a) Solo I

b) Solo III

c) Solo I y II

d) Solo II y III

e) I, II y III

15. ¿Cuál de las siguientes alternativas presenta la cantidad de bolitas blancas y rojas que deben haber en una caja para que la probabilidad de extraer una bolita roja sea $\frac{2}{5}$?

a) 10 blancas y 50 rojas

b) 20 blancas y 50 rojas

c) 20 blancas y 30 rojas

d) 30 blancas y 20 rojas

e) 50 blancas y 20 rojas

Capítulo 14

Permutaciones, Arreglos y Combinaciones

Cuando estamos en presencia de un conjunto ordenado de una determinada manera, nos pueden venir las preguntas, ¿porque está ordenado de esa forma?, ¿existen más posibilidades para ordenar éste conjunto?, ¿cuantas?, etc..., el estudio de las permutaciones, de los areglos y de las combinaciones nos permitirá responder a éstas y otras preguntas.

Versión 1.0, Febrero de 2008

14.1. Permutaciones

Las permutaciones consisten en cambiar el orden de un conjunto, y poder determinar cuantas posibilidades de ver de distinta forma ordenado el conjunto existen, por ejemplo; sea $\mathcal{M} = \{m_1, m_2, m_3, m_4, \ldots, m_n\}$ un conjunto de n elementos, entonces las posibilidades que tengo para poner en cada casillero será: en la primera posición puedo colocar cualquiera de los n elementos, en la segunda puedo colocar cualquiera de los que me quedan (que son $n-1$), en la tercera posición puedo colocar solo $n-2$ elementos y así voy quedándome con un elemento menos a medida que avanzo en los casilleros, hasta que me quedo solo con un elemento en la última posición, es decir:

$$\mathcal{M} = \{\underbrace{\qquad}_{n \text{ opciones}}, \underbrace{\qquad}_{n-1 \text{ opciones}}, \underbrace{\qquad}_{n-2 \text{ opciones}}, \underbrace{\qquad}_{n-3 \text{ opciones}}, \underbrace{\qquad}_{n-4 \text{ opciones}}, \ldots\ldots, \underbrace{\qquad}_{2 \text{ opciones}}, \underbrace{\qquad}_{1 \text{ opción}}\}$$

De manera que cuando tengo un conjunto de n elementos la cantidad de permutaciones que puedo hacer sobre éste será:

$$\mathcal{P}_{n \text{ elementos}} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

A éste número lo conocemos como *factorial de* n, lo simbolizamos como $n!$, por lo tanto las permutaciones que puedo hacer sobre un conjunto de n elementos será:

$$\mathcal{P}_{n \text{ elementos}} = n!$$

♠ **Ejemplo**

Determinemos la cantidad de ordenamientos distintos del conjunto de las vocales $\mathcal{V}$={a, e, i, o, u}:

$$\mathcal{P}_{5 \text{ vocales}} = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ posibilidades distintas}$$

14.2. Arreglos

Los arreglos son todas las posibles ordenaciones de n elementos sacados de un grupo más grande de m elementos ($m > n$), importando el orden de los conjuntos resultantes, de manera que $\{\alpha, \beta, \gamma\} \neq \{\beta, \gamma, \alpha\}$.

El número de arreglos de a n elementos que puedo hacer en un grupo de m elementos será:

$$\mathcal{A}_n^m = \frac{m!}{(m-n)!}$$

♠ **Ejemplo 1**

Determinemos la cantidad de arreglos de 2 vocales que podemos hacer en el conjunto de las vocales $\mathcal{V}$={a, e, i, o, u}:

Primero busquémoslos:

1.	{a, e}	6.	{e, i}	11.	{i, o}	16.	{o, u}
2.	{a, i}	7.	{e, o}	12.	{i, u}	17.	{u, a}
3.	{a, o}	8.	{e, u}	13.	{o, a}	18.	{u, e}
4.	{a, u}	9.	{i, a}	14.	{o, e}	19.	{u, i}
5.	{e, a}	10.	{i, e}	15.	{o, i}	20.	{u, o}

Existen 20 posibilidades, ahora veamoslo con la fórmula, donde m será la cantidad de vocales, y n la cantidad que habrá en los arreglos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_2^5 &= \frac{5!}{(5-2)!} \\
&= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} \\
&= 5 \cdot 4 \\
&= 20 \qquad \text{arreglos distintos}
\end{aligned}$$

♠ **Ejemplo 2**

Cuántos arreglos de a 3 elementos se pueden hacer de un conjunto de 6 elementos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_3^6 &= \frac{6!}{(6-3)!} \\
&= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} \\
&= 6 \cdot 5 \cdot 4 \\
&= 120 \qquad \text{arreglos distintos}
\end{aligned}$$

14.3. Combinaciones

Las combinaciones son muy parecidas a los arreglos, con la diferencia en que en los conjuntos que se forman no importa el orden de manera que $\{\alpha, \beta, \gamma\} = \{\beta, \gamma, \alpha\}$.

El número de combinaciones de a n elementos que puedo hacer de un total de m elementos será:

$$\mathcal{C}_n^m = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}$$

♠ **Ejemplo**

Javier, Gonzalo, Manuel, Pamela y Paola se han postulado a la directiva de su curso, pero solo 3 de ellos pueden quedar, ¿cuántas directivas posibles hay?.

Respuesta

En éste caso se trata de formar combinaciones entre los postulantes, pues si por ejemplo se elije a Javier, Gonzalo y Paola es lo mismo que se elija a Paola, Gonzalo y a Javier, lo que corresponde a una combinación de 3 elementos de un total de 5, por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_3^5 &= \frac{5!}{3!(5-3)!} \\
&= \frac{5\cdot 4\cdot 3!}{3!\cdot 2!} \\
&= \frac{5\cdot 4}{2} \\
&= 10 \qquad \text{posibles directivas distintas}
\end{aligned}$$

♣ *Actividad 14.1.*

Responde las siguientes preguntas

1. *Un pastelero dispone de 7 ingredientes para armar sus tortas, ¿cuantas tortas distintas de 3 ingredientes (sin que se repitan los ingredientes), podría hacer?.*
2. *De cuantas formas distintas puedes ordenar tu repisa de 8 libros.*
3. *¿Cuantas palabras distintas se pueden formar con la palabra matemática (no importa que no signifique nada)?*
4. *Si un presidente dispone de 10 políticos para designar a sus 7 senadores, ¿cuántos posibles senados pueden haber?,*

Capítulo 15

Interés

En nuestra vida cotidiana estamos continuamente enfrentándonos a la palabra interés, principalmente a través de promociones que nos ofrecen los bancos para que depositemos nuestros ahorros, o a través de los prestamos con interés, antiguamente conocidos como usura[1] , la forma que como funciones el interés es aumentando una cantidad (denominada *capital inicial*) al cabo de un periodo en un cierto porcentaje.

El capital inicial lo representaremos como c_i, al interés (expresado siempre en forma decimal) como i, al capital final como c_f y a la cantidad de períodos transcurridos como t.

Existen dos formas básicas de intereses, el simple y el compuesto.

Versión 1.0, Febrero de 2008

15.1. Interés Simple

El interés es simple si la ganancia provocada por el capital inicial se percibe después de pasados períodos iguales de tiempo, sin que el capital varíe en el proceso.

15.1.1. Deducción de la fórmula del interés simple

Como ya sabemos i representa un determinado interés, llamemos G a la ganáncia producida despues de t periodos, si definimos a $i = r\,\%$ anual entonces c_i producirá al cabo de un año una ganancia de $c_i \cdot r\,\%$, por lo tanto c_i prodrucirá pasados t años una ganancia de $t \cdot c_i \cdot r\,\%$. por lo tanto:

$$G_t = t \cdot c_i \cdot r\,\% = \frac{t \cdot c_i \cdot r}{100}$$

Si el tiempo está dado en meses entonces debemos transformarlos a años, pues el interés es anual, si está en días, entonces se convierte en meses y luego en años, lo que importa es que el tipo de interés coincida con el período.

Las formas de convertir de un tipo de dato a otro son:

$$\begin{aligned} t_{\text{años}} &= \frac{t_{\text{meses}}}{12} \\ t_{\text{meses}} &= \frac{t_{\text{días}}}{30} \end{aligned}$$

[1]La usura tiene sus origenes conocidos remotamente desde la edad media entre los prestamistas y los antiguos comerciantes.

15.1.2. Resolución de ejercicios con interés simple

Veamos algunos ejemplos :

♠ **Ejemplo 1**

Si deposito un capital inicial de \$500, ¿cual será la ganancia obtenida al cabo de 4 años si se tiene un interés anual del 5 %?

Respuesta

Aplicamos la fórmula, pues $c_i = \$500$, $i = 5\,\%$ anual y $t = 4$:

$$G_4 = 4 \cdot \$500 \cdot 5\,\% = \frac{4 \cdot \$500 \cdot 5}{100} = \$100$$

Por lo tanto al cabo de cuatro años obtendré una ganancia de \$100.

♠ **Ejemplo 2**

Si pido un préstamo de \$900, ¿cuánto será lo que deberé cancelar una vez pasados 40 meses si me dicen que me cobrarán un interés anual del 10 %?

Respuesta

Determinemos los datos $c_i = \$900$, $i = 10\,\%$ anual y $t = \frac{40}{12} = \frac{10}{3}$, pues el interes es del tipo anual, entonces:

$$G_t = \frac{10}{3} \cdot \$900 \cdot 10\,\% = \frac{10 \cdot \$900 \cdot 10}{300} = \$300$$

Por lo tanto al cabo de 40 meses deberé cancelar $\$900 + \$300 = \$1.200$.

♣ *Actividad 15.1.*

Calcula las siguientes ganancias por medio del interés simple:

1. *Hallar la ganancia proporcionada por \$5.000 con un interés anual del 5 % en 8 meses.*
2. *Hallar la ganancia proporcionada por \$10.000 con un interés mensual del 1 % en un años.*
3. *Hallar la ganancia proporcionada por \$1.500 con un interés semanal del 10 % en 3 días.*
4. *Hallar el capital final proporcionado por uno inical de \$1.000 con un interés anual del $5\frac{1}{2}\,\%$ en 50 meses.*
5. *Hallar la ganancia proporcionada por \$1.000.000 con un interés mensual del 1 % en 360 semanas.*
6. *Hallar el capital final proporcionado por uno inical de \$100 con un interés mensual del 10 % en 5 años.*

15.2. Interés Compuesto

Un interés es compuesto cuando las ganancias se suman al capital después de cada período, aumentándo a éste y a la ganancia que se sumará al próximo periodo pues ésta es un porcentaje del nuevo capital.

Éste es el tipo de interés que se ocupa usualmente pues a mayor tiempo trae mayores ganáncias que el interés simple.

Existen dos formas de calcular el interés compuesto, la primera es calcular la ganancia en un solo periodo con un interés simple, luego sumamos esta ganancia al capital inicial y formamos un nuevo capital, posteriormente realizamos el mismo proceso en un segundo periodo al nuevo capital, sumamos la nueva ganancia obtenida y volvemos a realizar el mismo proceso tantas veces como lo exija el problema.

La segunda manera de calcular el interés compuesto es ocupando la fórmula que a continuación veremos:

15.2.1. Deducción de la fórmula de interés compuesto

Primero calculemos el capital despues de un periodo (lo encontramos sumando al capital inicial la ganancia de un periodo).

$$\begin{aligned} c_1 &= c_i + c_i \cdot i \\ &= c_i(1+i) \qquad (15.1) \end{aligned}$$

Ahora éste nuevo capital (c_1), considerémoslo como un capital inicial para calcular nuevamente en el segundo periodo:

$$\begin{aligned} c_2 &= c_1 + c_1 \cdot i \\ &= (c_i(1+i)) + (c_i(1+i)) \cdot i \\ &= c_i + c_i i + c_i i + c_i i^2 \\ &= c_i + 2c_i i + c_i i^2 \\ &= c_i(1+2i+i^2) \\ &= c_i(1+i)^2 \qquad (15.2) \end{aligned}$$

Ahora consideremos c_2 como el capital inicial para el tercer período:

$$\begin{aligned} c_3 &= c_2 + c_2 \cdot i \\ &= (c_i(1+i)^2) + (c_i(1+i)^2) \cdot i \\ &= c_i + 2c_i i + c_i i^2 + c_i i + 2c_i i^2 + c_i i^3 \\ &= c_i(1+2i+i^2+i+2i^2+i^3) \\ &= c_i(1+3i+3i^2+i^3) \\ &= c_i(1+i)^3 \qquad (15.3) \end{aligned}$$

Así, observando las ecuaciones (15.1), (15.2) y (15.3) podemos concluir que despues de pasados n periodos el capital final será de:

$$\boxed{c_n = c_i(1+i)^n}$$

15.2.2. Resolución de ejercicios de interés compuesto

Veamos algunos ejemplos :

♠ **Ejemplo 1**

Si deposito en el banco un capital inicial de \$100.000, ¿cuál será mi ganáncia al cabo de 10 años si téngo un interés del 2 % mensual?

Respuesta

En éste caso el interés es mensual por lo tanto los periodos deben ser medidos en meses, lo que implica un total de $10 \cdot 12 = 120$ periodos en total, ahora reconozcamos los datos; $c_i = \$100.000$, $i = 2\,\%$ mensual y $t = 120$:

$$\begin{aligned} c_f &= \$100.000 \cdot (1 + 0{,}02)^{120} \\ &= \$100.000 \cdot (1{,}02)^{120} \\ &= \$100.000 \cdot 10{,}76516 \\ &= \$1.076.516 \end{aligned}$$

Por lo tanto al cabo de 10 años obtendré una ganancia de \$1.076.516−\$100.000=\$976.516.

♠ **Ejemplo 2**

Al pedir un préstamo a 20 años de \$1.000.000, el banco me ofrece una tasa de interés mensual de un 1 %, ¿una vez terminado este periodo, cuánto dinero habre pagado por concepto de aquel préstamo?

Respuesta

Determinemos los datos $c_i = \$1.000.000$, $i = 1\,\%$ mensual y $t = 20 \cdot 12 = 240$ meses, entonces:

$$\begin{aligned} c_f &= \$1.000.000 \cdot (1 + 0{,}01)^{240} \\ &= \$1.000.000 \cdot (1{,}01)^{240} \\ &= \$1.000.000 \cdot 10{,}892553 \\ &= \$10.892.553 \end{aligned}$$

Por lo tanto al cabo de 20 años habré cancelado \$10.892.553.

♣ ***Actividad 15.2.***

Responde las siguientes preguntas (para algunos ejercicios es necesario utilizar calculadora):

1. *¿En cuanto se convertirán $1.000 al* $1\frac{2}{3}\,\%$ *anual en 12 meses?.*
2. *¿En cuanto se convertirán $150 al* $\frac{10}{4}\,\%$ *anual en 2 años?.*
3. *¿Cual fue el interés mensual ocupado si a una persona que depositó hace un años 8 meses $10.000, hoy tiene un capital de $15.000?.*
4. *¿En cuánto tiempo una persona que deposita $1.000, logrará tener $1.100 si lo hace en un banco que le entrega un interés mensial del 10 %?*
5. *¿Que ganancia provocarán $500 depositados a un interés semanal de un 50 % en un año?*

Parte II

Solucionario

Soluciones a los Mini Ensayos

→ **Pag.17**

1.4. Mini Ensayo I, Números

1. *d*) 2. *d*) 3. *c*) 4. *e*) 5. *e*) 6. *b*) 7. *c*) 8. *a*) 9. *d*) 10. *b*)
11. *e*) 12. *d*) 13. *d*) 14. *e*) 15. *e*) 16. *a*) 17. *a*) 18. *e*) 19. *e*) 20. *b*)
21. *a*) 22. *c*) 23. *e*) 24. *e*)

→ **Pag.33**

2.4. Mini Ensayo II, Proporcionalidad

1. *b*) 2. *c*) 3. *d*) 4. *a*) 5. *d*) 6. *b*) 7. *c*) 8. *c*) 9. *d*) 10. *d*)
11. *a*) 12. *c*) 13. *b*) 14. *d*) 15. *b*) 16. *a*) 17. *c*) 18. *d*) 19. *d*)

→ **Pag.43**

3.5. Mini Ensayo III, Expresiones del Álgebra

1. *b*) 2. *c*) 3. *a*) 4. *b*) 5. *c*) 6. *b*) 7. *a*) 8. *e*) 9. *b*) 10. *a*)
11. *e*) 12. *a*) 13. *a*) 14. *e*) 15. *d*) 16. *d*) 17. *c*)

→ **Pag.53**

4.3. Mini Ensayo IV, Factorización

1. *e*) 2. *c*) 3. *b*) 4. *a*) 5. *e*) 6. *d*) 7. *e*) 8. *c*) 9. *e*) 10. *b*)
11. *d*) 12. *d*) 13. *e*) 14. *b*)

→ **Pag.72**

5.5. Mini Ensayo V, Ecuaciones Algebraicas

1. *a*) 2. *b*) 3. *e*) 4. *e*) 5. *b*) 6. *c*) 7. *b*) 8. *e*) 9. *c*) 10. *b*)
11. *a*) 12. *b*) 13. *c*) 14. *b*) 15. *c*) 16. *a*) 17. *e*) 18. *d*) 19. *e*) 20. *d*)

→ **Pag.82**

6.4. Mini Ensayo VI, Ecuaciones no Algebraicas

1. *a*) 2. *b*) 3. *e*) 4. *b*) 5. *b*) 6. *d*) 7. *c*) 8. *a*) 9. *a*) 10. *d*)
11. *d*) 12. *c*) 13. *b*) 14. *c*) 15. *a*) 16. *d*) 17. *d*) 18. *a*)

→ **Pag.93**

7.4. Mini Ensayo VII, Desigualdades e Inecuaciones

1. *a*) 2. *b*) 3. *d*) 4. *c*) 5. *a*) 6. *a*) 7. *d*) 8. *d*) 9. *a*)

→ **Pag.118**

8.4. Mini Ensayo VIII, Funciones

1. *c*) 2. *e*) 3. *c*) 4. *e*) 5. *a*) 6. *b*) 7. *b*) 8. *a*) 9. *e*) 10. *c*)
11. *e*) 12. *b*) 13. *c*) 14. *e*) 15. *b*) 16. *b*)

→ **Pag.131**

9.5. Mini Ensayo IX, Ángulos y Triángulos

1. *d*) 2. *d*) 3. *a*) 4. *a*) 5. *b*) 6. *b*) 7. *a*) 8. *e*) 9. *c*) 10. *b*)
11. *a*)

→ **Pag.138**

9.7. Mini Ensayo X, Cuadriláteros

1. *b*) 2. *a*) 3. *c*) 4. *e*) 5. *a*) 6. *b*) 7. *d*) 8. *a*) 9. *b*)

→ **Pag.148**

9.10. Mini Ensayo XI, Circunferencias

1. *b*) 2. *b*) 3. *b*) 4. *e*) 5. *e*) 6. *a*) 7. *d*) 8. *b*) 9. *e*) 10. *c*)
11. *b*) 12. *a*) 13. *c*)

→ **Pag.154**

9.12. Mini Ensayo XII, Áreas y Perímetros

1. *a*) 2. *d*) 3. *a*) 4. *c*) 5. *a*) 6. *a*) 7. *d*) 8. *d*) 9. *c*) 10. *c*)
11. *b*) 12. *d*) 13. *b*) 14. *e*) 15. *c*) 16. *e*)

→ **Pag.169**

10.8. Mini Ensayo XIII, Geometría de proporciones

1. *a*) 2. *e*) 3. *c*) 4. *a*) 5. *d*) 6. *a*) 7. *c*) 8. *b*) 9.*a*) 10. *e*)
11. *c*) 12. *b*) 13. *e*) 14. *c*) 15. *d*) 16. *b*) 17. *b*) 18. *a*) 19. *c*) 20. *a*)
21. *e*) 22. *a*)

→ **Pag.180**

11.3. Mini Ensayo XIV, Isometrías

1. *b*) 2. *b*) 3. *a*) 4. *a*) 5. *a*) 6. *e*) 7. *d*) 8. *b*) 9. *e*) 10. *a*)
11. *e*)

→ **Pag.199**

13.3. Mini Ensayo XV, Probabilidad y Estadística

1. *a*) 2. *c*) 3. *c*) 4. *d*) 5. *d*) 6. *a*) 7. *a*) 8. *c*) 9. *c*) 10. *e*)
11. *d*) 12. *c*) 13. *a*) 14. *e*) 15. *d*)

Soluciones a los Problemas Impares de Actividades

→ **Pag.12**

Actividad 1.1., Ejercicos Combinados

1. -17 *3.* -71 *5.* 14 *7.* -8

→ **Pag.14**

Actividad 1.2., Fracciones

1. 1 *3.* $\frac{29}{6}$ *5.* $-\frac{1}{2}$ *7.* $\frac{5}{18}$ *9.* $\frac{185}{72}$ *11.* $\frac{m^2(1-n)+n^2}{mn}$

→ **Pag.14**

Actividad 1.3., Potencias

1. $\frac{1}{6}$ *3.* $\frac{25}{36}$ *5.* $\frac{1}{125}$ *7.* 144 *9.* $\frac{104.976}{625}$ *11.* $\frac{2.401}{625}$ *13.* $\frac{1.000.000}{729}$
15. $\frac{6.571}{256}$ *17.* $\frac{8.000.000}{125}$ *19.* $\frac{1.296}{4.096\times 10^{16}}$

→ **Pag.15**

Actividad 1.4., Raices

1. 8 *3.* 8 *5.* $-\frac{3}{2}$ *7.* $\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$ *9.* -27 *11.* 36 *13.* $\sqrt[3]{18}$
15. 2

→ **Pag.17**

Actividad 1.5., Notación Científica

I.1. 10^{-5} *I.3.* $1{,}2523\times 10^5$ *I.5.* $8{,}5325\times 10^{10}$ *I.7.* $1{,}001\times 10^{-9}$
I.9. $9{,}98\times 10^{20}$ *II.1* 120 *II.3.* 0,00156 *II.5.* 602.200.000.000.000.000.000.000
II.7. 299.000.000

→ **Pag.26**

Actividad 2.1., Razones y Proporciones

1. $x=\frac{20}{3}$ *3.* $x=10$ *5.* $x=69$ *7.* $x=\pm 6$ *9.* $x=115$
11. $x=\pm 12$ *13.* $x=\pm 3$ *15.* $x=\pm 16$

→ **Pag.30**

Actividad 2.2., Proporcionalidad

I.1. \$96.000 *I.3.* 2 metros *II.1.* 2 horas *II.3.* 25 minutos
III.1. 24 rompecabezas

→ **Pag.32**

Actividad 2.3., Porcentaje

I.1. 20, 30 y 40 *I.3.* 16, 24 y 32 *I.5.* 10, 15 y 20 *I.7.* 2, 3 y 4
I.9. 10.960, 16.440 y 21.920 *I.11.* 191,2, 286,8 y 382,4 *II.1.* $33,\overline{3}\,\%$
II.3. 0,5 % *II.5.* $22,\overline{6}\,\%$ *II.7.* $16,\overline{6}\,\%$ *II.9.* 300 % *II.11.* 200 %

→ **Pag.38**

Actividad 3.1., Expresiones Algebraicas 1

1. *"Un número disminuido en 4."*
3. *"La diferencia entre el quíntuplo de un número y otro número."*
5. *"El cuadrado del exceso de un número sobre 3."*
7. *"La cuarta parte de la diferencia entre el doble de un número y el triple de otro."*
9. *"Un número aumentado en su cuarta parte."*
11. *"El séptuplo del cubo de un número."*
13. *"La cuarta parte de la diferencia entre el triple del cuadrado de un número y el cubo del doble de otro número."*
15. *"La tercera parte del doble de la suma entre el cuadrado de un número y el cubo de otro."*
17. *"La razón entre el exceso del triple de un número sobre 2, y el exceso del triple del mismo número sobre 4."*

→ **Pag.39**

Actividad 3.2., Expresiones Algebraicas 2

1. $2x - 3y$ *3.* $x + \frac{x}{2}$ *5.* $5x - 10$ *7.* $(4x)^3$ *9.* $\frac{(3x)^2 - 2y^3}{2}$

→ **Pag.41**

Actividad 3.3., Términos Semejantes

1. $13(a-b)$ *3.* $x^{m+3} - a^{m+2} - 3$ *5.* $-\frac{13}{10}m^2 - \frac{mn}{3}$

→ **Pag.41**

Actividad 3.4., Producto de Monomios

1. $-5x^4y^3$ *3.* $3a^{x+2}b^3$ *5.* $30a^{m+2}b^{n+3}x$ *7.* $6m^{x+2}n^{a+1}$ *9.* $-20x^{a+7}b^{a+5}$
11. $\frac{1}{2}x^3a^2by^9$ *13.* $-3a^4$ *15.* $6a^{m+5}b^{x+1}x$ *17.* $-\frac{3}{10}m^{a+4}a^{x+2}$

→ **Pag.42**

Actividad 3.5., Producto de Polinomios con Monomios

1. $576ax^4y - 6ax^3y^2$ *3.* $-4a^7 + 1240a^5bm^2 + 32a^5b^2m^2$
5. $-5a^{11} + 15a^9b^2 - 5a^7b^4 + 15a^5b^6$ *7.* $\frac{1}{2}x^2y^3 - \frac{3}{5}xy^4 - \frac{3}{8}y^5$ *9.* $\frac{1}{3}x^7y^4 - \frac{3}{2}x^5y^6$
11. $\frac{1}{2}m^5n^3 + \frac{3}{8}m^4n^4 - \frac{5}{8}m^3n^5 - \frac{1}{12}m^2n^9$

→ **Pag.42**

𝔄𝔠𝔱𝔦𝔳𝔦𝔡𝔞𝔡 *3.6., Producto de Polinomios*

1. $a^2 + 2a - 3$ *3.* $x^3 - y^3$ *5.* $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ *7.* $a^x + a^{x+3}$
9. $a^{5m-2} - 8a^{5m-1} + 6a^{5m} - 15a^{5m+1}m + 120a^{5m+2}m - 90a^{5m+3}m$
11. $\frac{3}{5}m^4 - \frac{17}{60}m^2n^2 + \frac{7}{6}mn^3 + \frac{1}{10}m^3n - n^4$

→ **Pag.48**

𝔄𝔠𝔱𝔦𝔳𝔦𝔡𝔞𝔡 *4.1., Productos Notables*

1. $25 + 10x + x^2$ *3.* $9a^8 - 30a^4b^2 + 25b^4$ *5.* $x^{10} - 6ax^5y^2 + 9a^2y^4$
7. $a^{2x-4} - 10a^{x-2} + 25$ *9.* $1 - 9a^2x^2$ *11.* $9x^{2a} - 25y^{2m}$ *13.* $a^{2x+2} - 4b^{2x-2}$
15. $1 - 9y + 27y^2 - 27y^3$ *17.* $64n^3 + 144n^2 + 108n + 27$ *19.* $1 - 3a^2 + 3a^4 - a^6$

→ **Pag.52**

𝔄𝔠𝔱𝔦𝔳𝔦𝔡𝔞𝔡 *4.2., Factorización*

1. $(a+b)(x-y)$ *3.* $(m-n)(4x-1)$ *5.* $(a+2)(x+2)$ *7.* $(x-y^2)(n^2+5a)$
9. $(5x+2y)(4a-b)$ *11.* $\left(\frac{a}{2} - b\right)^2$ *13.* $(14xy^2 + 17b^2m^5)(14xy^2 - 17b^2m^5)$
15. $(a^n + b^n)(a^n - b^n)$ *17.* $(3x^2 + 2y)(3x^2 - 2y)$ *19.* $(1 - 3n - 2a)(1 - 3n)$
21. $(x - 10)(x + 3)$ *23.* $(x^2 + 12a)(x^2 - 5a)$ *25.* $(3m + 2)(5m - 3)$
27. $(5a + 2b)^3$ *29.* $(x - 11)(x - 1)$

→ **Pag.59**

𝔄𝔠𝔱𝔦𝔳𝔦𝔡𝔞𝔡 *5.1., Ecuaciones de Primer Grado*

1. $x = 3$ *3.* $x = 3/2$ *5.* $x = 1/5$ *7.* $x = 6$ *9.* $x = 7$
11. $x = -5$ *13.* $x = -13/14$ *15.* $x = 3/2$ *17.* $x = -9$ *19.* $x = -1/4$
21. $x = 2$ *23.* No tiene solución *25.* $x = 2$ *27.* $x = -5/2$
29. $x = 2$ *31.* $x = 3$ *33.* $x = -4$ *35.* $x = 8/13$ *37.* $x = 3$
39. $x = 193/86$

→ **Pag.64**

𝔄𝔠𝔱𝔦𝔳𝔦𝔡𝔞𝔡 *5.2., Ecuaciones de Segundo Grado*

1. $x_1 = -3$ *y* $x_2 = -4$ *3.* $x = \pm 1$ *5.* $x = -1$ *7.* $x_1 = 11$ *y* $x_2 = -10$
9. $x = \pm\sqrt{2}$ *11.* No tiene solución en $\mathbb{R}$ *13.* $x = \pm 1$
15. $x_1 = 2$ *y* $x_2 = -11$ *17.* $x_1 = 7$ *y* $x_2 = 1/3$ *19.* $x = \pm 1$
21. $x_1 = -1/3$ *y* $x_2 = -1/2$

→ **Pag.71**

𝔄𝔠𝔱𝔦𝔳𝔦𝔡𝔞𝔡 *5.3., Sistemas de Ecuaciones*

1. $x = 19/31,\ y = -11/31$ *3.* No tiene soluciones
5. $x = c/a,\ y = 0$ *(si* $b \neq 0$*)* *7.* $x = 3,\ y = 4$ *9.* $x = -1,\ y = 2$
11. $x = 1/3,\ y = 1/4$ *13.* $x = 1,\ y = 2$ *y* $z = 5$

→ **Pag.78**

𝔄𝔠𝔱𝔦𝔳𝔦𝔡𝔞𝔡 *6.1., Ecuaciones Exponenciales*

1. $x = 5$ *3.* $x = -17/7$ *5.* $x = -13/5$ *7.* $x = -19$ *9.* $x = 0$
11. $x = 1/5$ *13.* $x = -5/4$

→ **Pag.81**

Actividad 6.2., Ecuaciones Logarítmicas

I.1. 3 *I.3.* 0 *I.5.* 2/3 *I.7.* 1/4 *I.9.* b

II.1. 6 *II.3.* 6 *II.5.* -8 *II.7.* $\sqrt[5]{10^3}$ y $\dfrac{1}{\sqrt[5]{10}}$

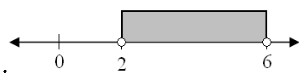
→ **Pag.82**

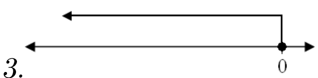
Actividad 6.3., Ecuaciones Exponenciales con Logarítmos

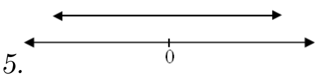
1. $x = -1$ *3.* $x = 2/\log(5)$ *5.* $x = \log(25) + 2$ *7.* $x = 1/2$

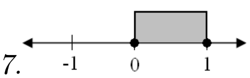
→ **Pag.92**

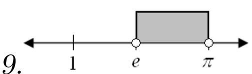
Actividad 7.1., Desigualdades e Inecuaciones

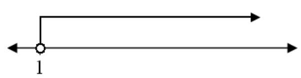
I.1. 

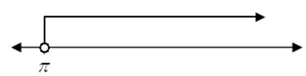
I.3. 

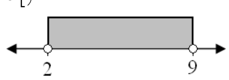
I.5. 

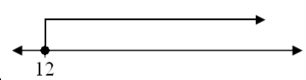
I.7. 

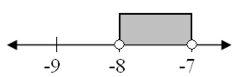
I.9. 

II.1. $]1, +\infty[$, 

II.3. $]\pi, +\infty[$, 

II.5. $[2, 9]$, 

II.7. $[12, +\infty[$, 

II.9. $]-8, -7[$, 

III.1. $x > 7$ *III.3.* $x \leq -2$ *III.5.* $x > -3$ *III.7.* $x \geq 3$ o $x \leq -3$
III.9. $x < 10$

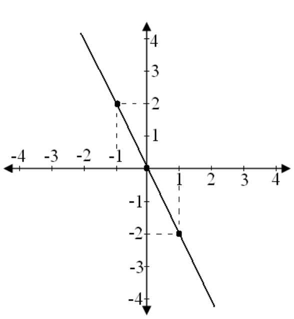
→ **Pag.104**

Actividad 8.1., Rectas

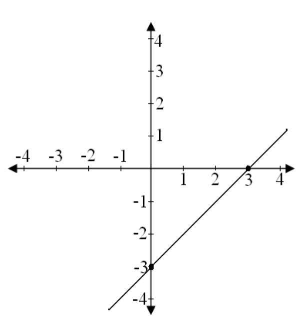
1. L_1 es secante a L_2 *3.* L_1 es perpendicular a L_2 *5.* L_1 es coincidente a L_2
7. L_1 es secante a L_2 *9.* L_1 es paralela a L_2

→ **Pag.105**

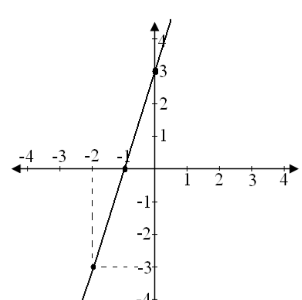
Actividad 8.2., Ecuación de la recta



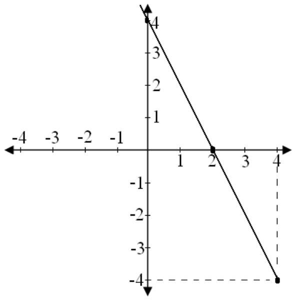
I.1.

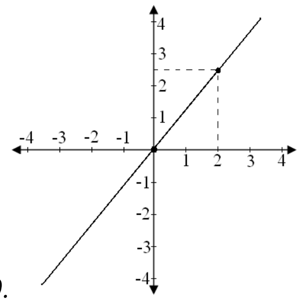


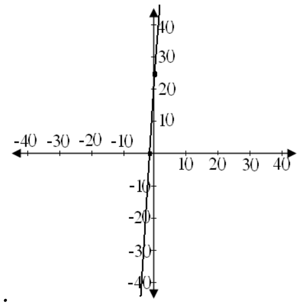
I.3.

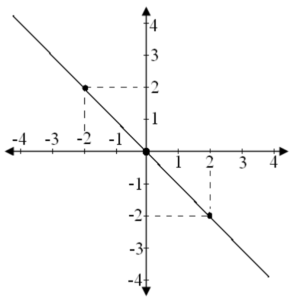


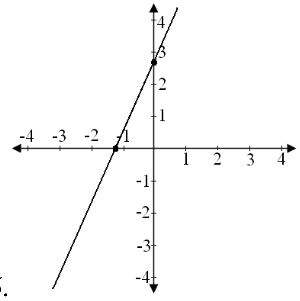
I.5.

I.7.


I.9.


I.11.


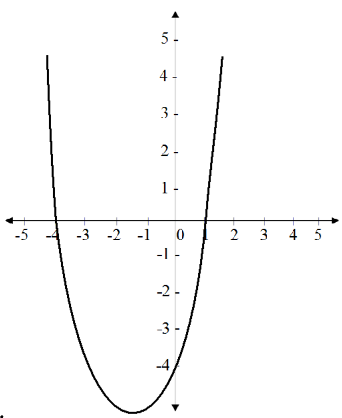
I.13.


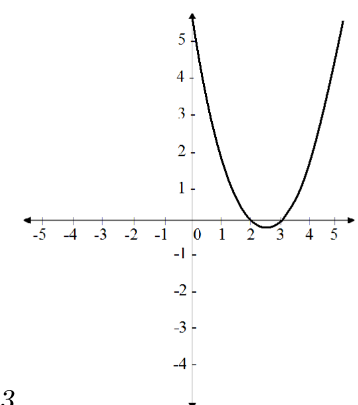
I.15.


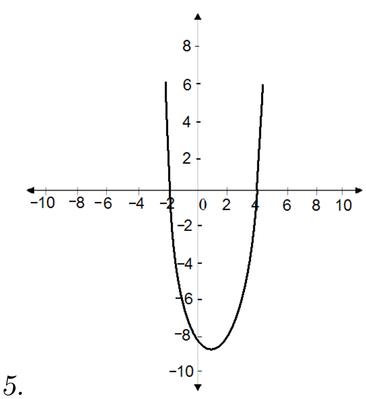
II.1. $y = x + 1$ *II.3.* $y = \frac{11}{4}x - \frac{43}{4}$ *II.5.* $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5a}{2}$ *II.7.* $y = \frac{1}{9}x + 7$
II.9. No existe tal recta *11.* $y = \frac{1}{11}x + \frac{60}{11}$

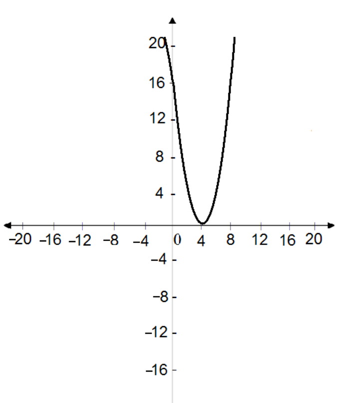
→ **Pag.114**

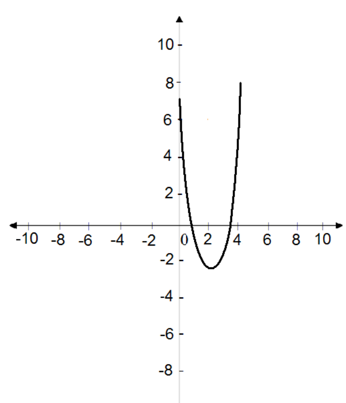
Actividad 8.3., Función Cuadrática

1.


3.


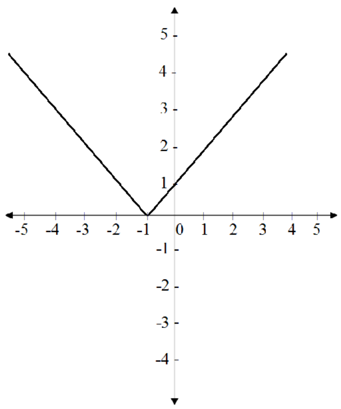
5.


7.


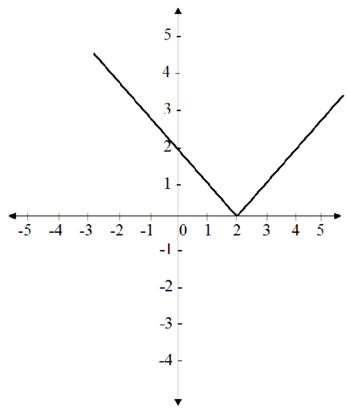
9.


→ **Pag.114**

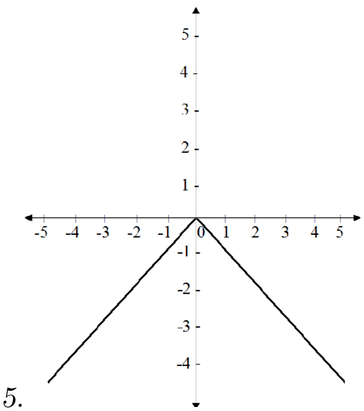
Actividad *8.4., Función Valor Absoluto*



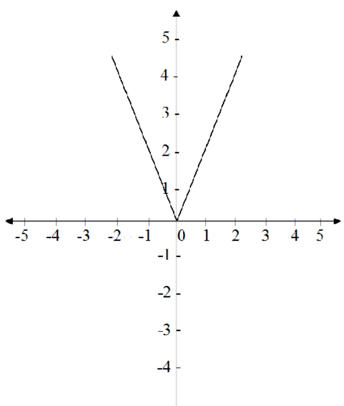
1.



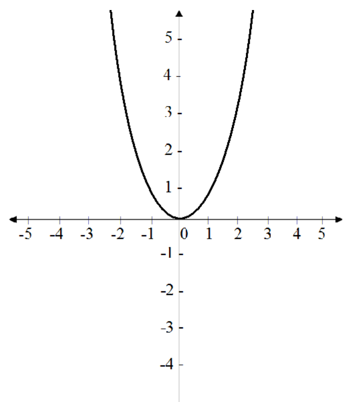
3.



5.



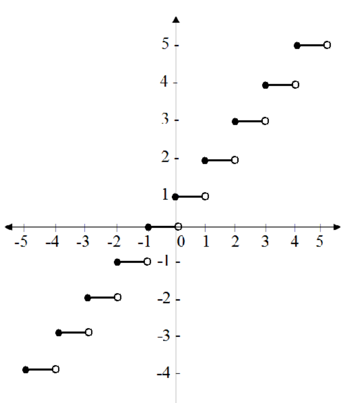
7.



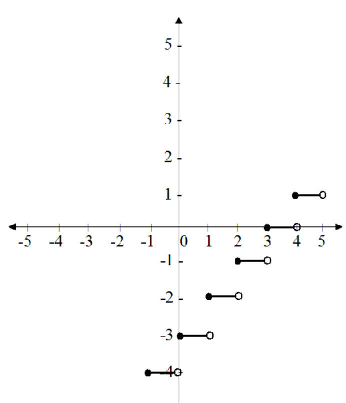
9.

→ **Pag.115**

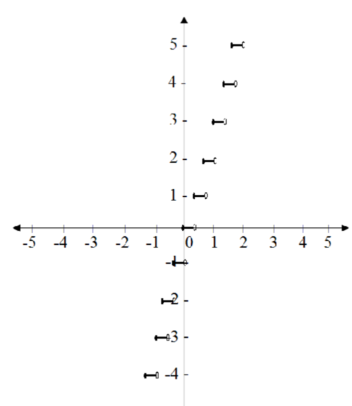
Actividad *8.5., Función Parte Entera*



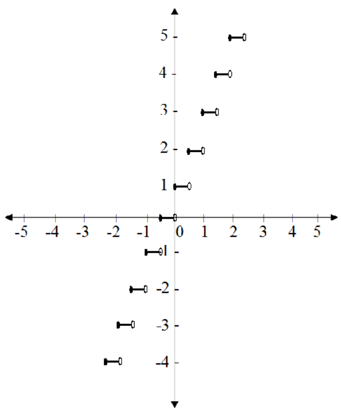
1.



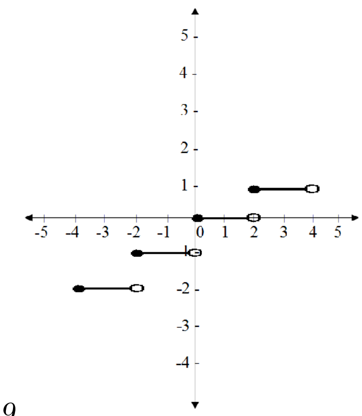
3.



5.



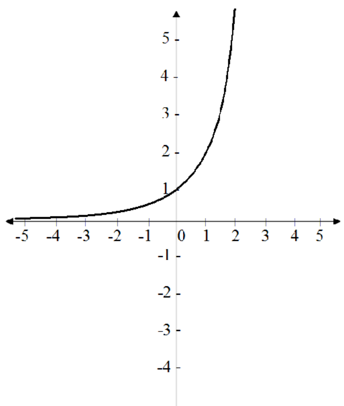
7.



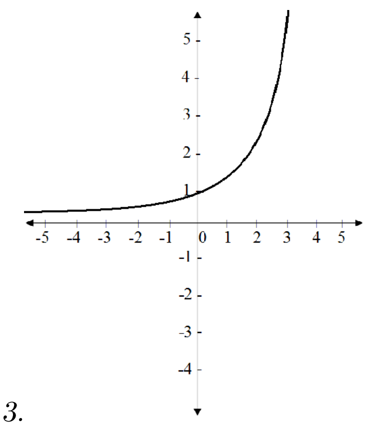
9.

→ **Pag.116**

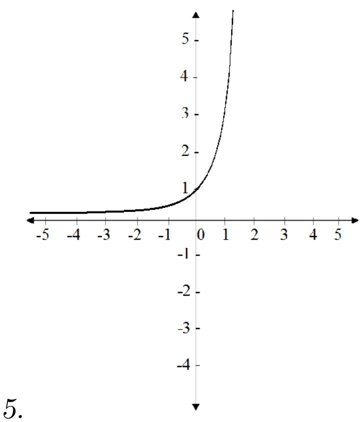
Actividad *8.6., Función Exponencial*



1.



3.



5.

→ **Pag.187**

Actividad *12.1., Cuerpos Geométricos*

1. $4+4\sqrt{2}\,cm$ *3.* $24\,cm$ *5.* $8\,cm^3$

→ **Pag.194**

Actividad *13.1., Probabilidades*

I.1. $\dfrac{7}{20}=35\,\%$ *I.3.* $\dfrac{3}{20}=15\,\%$ *I.5.* $\frac{11}{20}=55\,\%$ *I.7.* $\dfrac{1}{10}=10\,\%$

I.9. $\dfrac{0}{200}=0\,\%$

II.1. $\dfrac{2}{9}=22,\overline{2}\,\%$ *II.3.* $\dfrac{5}{6}=83,\overline{3}\,\%$ *II.5.* $\dfrac{59}{72}$

→ **Pag.196**

Actividad *13.2., Estadística*

1. Moda = *No hay Moda*, Mediana $=5,5$, Promedio $=5,5$
3. Moda = *No hay Moda*, Mediana $=3/4$, Promedio $=61/60$
5. Moda $=12$ *y* 56, Mediana $=12$, Promedio $=31,857$
7. Moda $=\sqrt{2}$, Mediana $=\sqrt{2}$, Promedio $=\frac{14}{5}\sqrt{2}$

→ **Pag.199**

Actividad 13.3., Histograma

1. *F* *3.* *V* *5.* *V*

→ **Pag.205**

Actividad 14.1., Combinatoria

1. $\dfrac{7!}{(7-3)!} = 210$ *tortas* *3.* 10!=3.628.800 *palabras*

→ **Pag.208**

Actividad 15.1., Interés Simple

1. $\$166,\overline{6}$ *3.* \$1.200 *5.* \$900.000

→ **Pag.210**

Actividad 15.2., Interés Compuesto

1. $\$1016,\overline{6}$ *3.* \$157,6 *5.* \$141.693.666.214

Bibliografía

‡ Álgebra, *Décima quinta edición* —*1997*
Dr. Aurelio Baldor

‡ Aritmética, *Décima tercera edición* —*1997*
Dr. Aurelio Baldor

‡ Geometría, *Décima tercera edición* —*1997*
Dr. Aurelio Baldor

‡ Ejercicios PSU Matemática, *Primera edición* —*2004*
Danny Perich C.

‡ Matemática Hoy 7° Básico, *Primera edición* —*1991*
Ana María Panesi P. y Carmen Gloria Bascuñán B.

‡ Matemática PSU, *Primera edición* —*2007*
Marcelo Rodríguez Aguilera

‡ PSU parte Matemática, *Primera edición* —*2006*
Juan Luis Yarmuch y Leonardo Medel

Índice alfabético