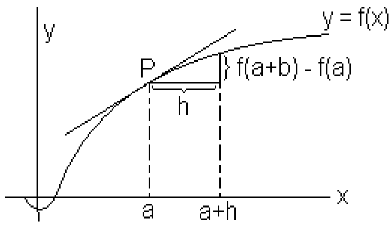
# APLICACIONES DE LA DERIVADA

## RECTA TANGENTE Y RECTA NORMAL A UNA CURVA

La recta tangente a la curva y =f(x) en el punto P(a, f(a)), tiene una pendiente m dad por la ecuación:




$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

La pendiente m = f '(a): Derivada de f en a es decir:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

**Ejemplo:**

**Encuentre la ecuación de la recta tangente a la parábola**

**f(x)= $x^2$-8x+ 9 en el punto (3, -6)**

$f'(x) = 2x - 8$ La ecuación de la recta es: **$y - y_1 = m(x - x_1)$**

**Y –(-6) = -2(x – 3)**

**Y = -2x**

**Nota: 1. Si dos rectas son paralelas tienen pendientes iguales**

**2. Si dos rectas son perpendiculares el producto de sus pendientes es Igual a -1**

**EJERCICIOS**

1. **Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto P = (-1,-2) y es perpendicular a la recta que tiene por ecuación $y = \frac{1}{3}x + 1$**
2. **Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva definida por** $y = x^2 + 1$ *en el punto de la curva en que* $x = 2$.
3. **Halla la ecuación de la recta tangente a la curva definida por y = $x^2$ - x + 1 en el punto en donde x = -1**
4. **Halla la ecuación de la recta normal a la curva del punto anterior (3)**
5. **Encontrar la ecuación de la recta tangente a la parábola y = $x^2$ - 8x + 9 en el punto (3,-6)**
6. **Encuentre una ecuación de la recta tangente la curva y $2x^2$ + 3 que sea paralela a la recta 8x – y + 3 = 0**
7. **Obtenga una ecuación de la recta tangente a la curva y = 2 - $\frac{1}{3}$ $x^2$ que sea perpendicular a la recta 2x + 18y – 9 = 0**

## RAZON DE CAMBIO

**Razones de cambio relacionadas:**

**En un problema de razón de cambio, la idea es calcular la razón de cambio de una de las cantidades con respecto o en términos de la razón de cambio**

de la otra. El procedimiento es hallar una ecuación que relacione las dos cantidades, y luego, aplicar la regla de la cadena para derivar ambos miembros con respecto al tiempo.

**Estrategia de solución:**

1. Lea el problema con cuidado.
2. Si es posible, dibuje un diagrama.
3. Introduzca la notación. Asigne símbolos a todas las cantidades que sean funciones del tiempo.
4. Exprese la información dada y la razón de cambio requerida en términos de derivadas.
5. Escriba una ecuación que relacione las diversas cantidades del problema.
6. Use la regla de la cadena, derivando los dos miembros de la ecuación con respecto a t.
7. Sustituya la información dada en la ecuación resultante y resuelva para la razón desconocida.

**EJEMPLO:**

**A un globo esférico se bombea aíre de modo que su volumen aumenta a razón de 100 $cm^3/s$. Con qué rapidez aumenta el radio del globo cuando el radio mide 90cm?**

**Solución:** Si V(volumen del globo y r radio, entonces V y r están relacionadas por medio de la ecuación: $V = \frac{4}{3}¶r^3$. Tenemos que $\frac{dV}{dt}$ = 100 $cm^3/s$ y se pide encontrar $\frac{dr}{dt}$ cuando r = 25 cm. Aplicamos la regla de la cadena

$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr}\ \frac{dr}{dt} = 4¶r^2 \frac{dr}{dt}$ Si se sustituye r = 25 y $\frac{dV}{dt}$ = 100 se obtiene

$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{4¶(25)^2}100 = \frac{1}{25¶}$ El radio del globo aumenta a razón de 1/25¶ cm/s

**EJERCICIOS**

1. Se lanza una esfera verticalmente hacia arriba de modo que su altura sobre el suelo después de t segundos está dada por $h = 49t - \frac{1}{2}(9.8)t^2$ ( en metros).
   a) Hallar la velocidad inicial del ascenso
      Solución: $h = 49t - \frac{1}{2}(9.8)t^2$ $v = \frac{dh}{dt} = 49 - 9.8t$
      La velocidad inicial se tiene cuando t = 0 $v_0 = 49 - 9.8(0) = 49$ m/s
      En t = 1 $V = 49 - 9.8(1) = 39.2$ m/s
   b) Hallar el tiempo de subida
      Solución: Se sustituye la velocidad en el punto más alto por cero:
      $V = 49 - 9.8t$
      $0 = 49 - 9.8t$ ; t = 5 s
   c) Calcular la altura máxima que alcanza la esfera
      Sustituyendo h= 49 8 5 9 - $\frac{1}{2}(9.8)(5)^2$ 0 122.5
   d) Calcular la aceleración
      Solución: La aceleración viene dada por $a = \frac{dv}{dt} = -9.8 m/s^2$
2. Una escalera de 10 pies de longitud se apoya contra una pared vertical. Si la base de la escalera se desliza alejándose de la pared a razón de 1pie/s. Con qué rapidez se desliza hacia debajo de la pared la parte superior de la escalera, cuando la base de ella se encuentra a 6 pies de la pared?

Solución: x, y son funciones de t. Tenemos $\frac{dx}{dt} = 1pie/s$ debemos encontrar $\frac{dy}{dt}$, cuando x = 6 pies. En este problema, la relación entre *x* , y *y* está dada por $x^2 + y^2 = 100$
Derivando cada miembro de la ecuación respecto a t:
$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$

$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$

**Por Pitágoras: x= 6, y = 8 y sustituyendo estos**

**valores y** $\frac{dx}{dt} = 1, tenemos \frac{dy}{dt} = -\frac{6}{8}(1) = -\frac{3}{4}\ pies/s$

3. **Un tanque de agua tiene la forma de un cono circular invertido cuyo radio de la base es de 2 m y la altura es de 4 m . Si se bombea agua dentro del tanque a razón de 2 m³/min, encontrar la velocidad a la que aumenta el nivel del agua cuando esta tiene 3 m de profundidad.**

   **Solución: Sean V, r y h, el volumen del agua, el radio de la superficie del agua y la altura en el tiempo t. Tenemos** $\frac{dV}{dt}$ **= 2m³/min y debemos encontrar** $\frac{dh}{dt}$ **cuando h mide 3 m. Las cantidades V y h están relacionadas por medio de la fórmula V =** $\frac{1}{3}\ ¶r^2h$ **pero V se debe expresar en términos de h solamente. Para eliminar r , usamos los triángulos semejantes de la figura asi:**

   $\frac{r}{h} = \frac{2}{4}$ **r=** $\frac{h}{2}$

   **La expresión V se convierte en:**

   **V =** $\frac{1}{3}\ ¶[\frac{h}{2}]^2h = \frac{¶}{12}\ h^3$

   **Ahora derivamos con respecto a t**

   $\frac{dV}{dt} = \frac{¶}{4}$ **$h^2$** $\frac{dh}{dt}$

   $\frac{dh}{dt} = \frac{4}{¶h^2}\ \frac{dV}{dt}$

   **Sustituyendo h = 3m y** $\frac{dV}{dt}$ **= 2 m³/min tenemos:** $\frac{dh}{dxt} = \frac{4}{¶(3)^2}.3 = \frac{8}{9¶}\ = 0.28\, m/min$

4. **Al calentar un disco metálico sufre cierta dilatación. Si el radio crece a razón de 0.42 cm/s. Con qué rapidez crece el área, cuando el radio es 12 cm?**

   **Solución: Área del círculo: A = ¶ r² . Al variar el radio cambia también el área. Para conocer la ecuación que relaciona las dos magnitudes, cuando están cambiando con el tiempo, se derivan implícitamente con respecto al tiempo**

   $\frac{dA}{dt} = 2¶r\ \frac{dr}{dt}$ **se reemplazan los valores**

   $\frac{dA}{dt} = 2¶\,(12\ cm)[0.42\frac{cm}{s]} = 31.66\ cm/s$

5. **Se inyecta aire a un globo esférico a razón de 20 pies³/min. A qué razón varia el radio cuando mide 3 pies?**

**Solución:** $\frac{dV}{dt} = 20\frac{pies^3}{mi}, entonces\ se\ quiere\ \frac{dr}{dt}\ en\ r = 3$

**Volumen de la esfera V =** $\frac{4}{3}\ ¶\,r^3$

$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\ ¶\ \frac{d}{dt}\ r^3$

$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\ ¶\ [\,3\,r^2\,\frac{dr}{dt}\,]$

$\frac{dV}{dt}$ **= 4 ¶ r²** $\frac{dr}{dt}$ **Como :** $\frac{dV}{dt} = 20\frac{pies^3}{mi}$ **Entonces 20 = 4 ¶ r²** $\frac{dr}{dt}$

$\frac{dr}{dt} = \frac{20}{¶\, r^2}$, **para r = 3**

$= \frac{5}{9¶}\ pie/min$

6. **Una partícula se desplaza a lo largo de una recta horizontal de acuerdo con la ecuación $s = 2t^3 - 4t^2 + 2t - 1$ Determinar los intervalos de tiempo cuando la partícula se desplace a la derecha y cuando lo haga a la izquierda. También determinar cuando cambia de sentido el movimiento.**

7. **Suponga que el costo total de fabricación de x juguetes es C(x) u.m. y que $C(x) = 110 + 4x + 0.02x^2$. Cuál es la función que representa el costo marginal? Cuál es el costo marginal cuando x = 50?**

8. **El ingreso total percibido por la venta de x mesas es $R(x) = 300x - x^2$.**
   **Evaluar: a) La función de ingreso marginal**
   **b)El ingreso marginal cuando x = 40**
   **c) El ingreso real por la venta de la 41ª mesa**

9. **U objeto cae desde el reposo y $s = -16t^2$ donde s pies es la distancia del objeto desde su punto de partida a los t s, y el sentido positivo es hacia arriba. Si una piedra se deja caer desde un edificio de 256 pies de altura. Calcular:**
   a) **La velocidad instantánea de la piedra 1s después de que se deja caer.**
   b) **La velocidad instantánea de la piedra 2s después de que se deja caer.**
   c) **Cuánto tarda en llegar al suelo?**
   d) **La velocidad instantánea de la piedra cuando llega al suelo.**